Equação do 2º grau

Prof. Msc. Wagner Santiago de Souza

Lembrete: Raiz quadrada

- Dados dois números $n \geq 0$ e $a \geq 0$, temos que $\sqrt{n} = a$ se $a^2 = \text{n}$

Ex1. $\sqrt{16} = 4, pois\ 4^2 = 16;$

Ex2. $\sqrt{49} = 7, pois\ 7^2 = 49;$

Ex3. $\sqrt{144} = 12, pois\ 12^2 = 144.$

Como calcular raiz quadrada?

Para calcular $\sqrt{n}$, devemos seguir os seguintes passos:

1: Fatorar o número n (Decompor em fatores primos);

2: Agrupar de dois em dois fatores iguais, obtendo assim, potências de expoente 2;

3: Substituir o número n, dentro da raiz, pela multiplicação das potências de expoente 2, obtidas no passo 2;

4: Tirar da raiz as bases das potências do passo 2, mantendo a operação de multiplicação;

5: Resolver a multiplicação obtida no passo 4.

Exemplo 4

- $\sqrt{144}$

144	2	
72	2	2^2
36	2	
18	2	2^2
9	3	
3	3	3^2
1		

- $\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
- Logo, $\sqrt{144} = 12$.

Exemplo 5

- $\sqrt{441}$

441	3	
147	3	3^2
49	7	
7	7	7^2
1		

- $\sqrt{3^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 7 = 21$
- Logo, $\sqrt{441} = 21$.

Equações do 2º grau

- São equações cujo o maior expoente da incógnita é 2;
- Uma equação do 2º grau com incógnita x pode ser escrita da seguinte maneira $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$;
- A igualdade do item anterior é conhecida como forma reduzida de uma equação do segundo grau. Nela a, b e c são os coeficientes, sendo a o coeficiente de x^2, b o coeficiente de x e c o termo independente;
- As equações do 2º grau em que a, b e c são diferentes de zero são denominadas completas. Já aquelas em que $b = 0$, $c = 0$ ou $b = c = 0$ são as incompletas.

Exemplos

- 1) Equação do 2º grau completa:

$$x^2 - 4x - 5 = 0, com\ a = 1, b = -4\ e\ c = -5.$$

- 2) Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, ou seja, com $c = 0$:

$$2x^2 + 8x = 0, com\ a = 2, b = 8\ e\ c = 0.$$

- 3) Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, ou seja, com $b = 0$:

$$-3x^2 + 27 = 0, com\ a = -3, b = 0\ e\ c = 27.$$

- 4) Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 = 0$, ou seja, com $b = c = 0$:

$$4x^2 = 0, com\ a = 4, b = 0\ e\ c = 0.$$

Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$

- Passo a passo:
- 1) Isolar o x^2, ou seja, obter $x^2 = n$. Para isso, utilizaremos o mesmo método utilizado nas equações do 1º grau, deixando quem tem a incógnita em um membro e quem não tem no outro;
- 2) Encontrar as raízes (os valores de x). Para isso, faremos a seguinte transição:

$$x^2 = n \Rightarrow x = \pm\sqrt{n}.$$

Exemplo 6

- Resolva a equação $2x^2 - 32 = 0$.

$$2x^2 - 32 = 0$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = \frac{32}{2}$$
$$x^2 = 16 \ (Passo\ 1)$$
$$x = \pm\sqrt{16} \ (Passo\ 2)$$
$$x = \pm 4.$$

Logo, as raízes da equação são – 4 e 4.

Exemplo 7

- Resolva a equação $-4x^2 + 36 = 0$.

$$-4x^2 + 36 = 0$$
$$-4x^2 = -36 \qquad \times(-1)$$
$$4x^2 = 36$$
$$x^2 = \frac{36}{4}$$
$$x^2 = 9 \quad (Passo\ 1)$$
$$x = \pm\sqrt{9} \quad (Passo\ 2)$$
$$x = \pm 3.$$

Logo, as raízes da equação são – 3 e 3.

Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$

- Passo a Passo:

- 1) Nesse tipo de equação todos os termos possuem o fator x, desse modo, podemos colocar o x em evidência, ou seja:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

- 2) Finalizado o passo 1, temos um produto de dois fatores igual a zero. Desse modo, podemos garantir que pelo menos um desses fatores é igual a zero, ou seja:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; ax + b = 0$$

- 3) Uma raiz é $x = 0$. Para encontrar a outra basta resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Exemplo 8

- Resolva a equação $3x^2 + 18x = 0$.

$$3x^2 + 18x = 0$$
$$x \cdot (3x + 18) = 0 \ (Passo\ 1)$$
$$x = 0 \ ou \ 3x + 18 = 0 \ (Passo\ 2)$$
$$3x + 18 = 0$$
$$3x = -18$$
$$x = \frac{-18}{3}$$
$$x = -6 \ (Passo\ 3)$$

Logo, as raízes da equação são 0 e – 6.

Exemplo 9

- Resolva a equação $5x^2 - 10x = 0$.

$$5x^2 - 10x = 0$$
$$x \cdot (5x - 10) = 0 \quad (Passo\ 1)$$
$$x = 0\ ou\ 5x - 10 = 0 \quad (Passo\ 2)$$
$$5x - 10 = 0$$
$$5x = 10$$
$$x = \frac{10}{5}$$
$$x = 2 \quad (Passo\ 3).$$

Logo, as raízes da equação são 0 e 2.

Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$

- Esse tipo de equação possui sempre 2 raízes iguais a 0, pois:
- $ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0.$

Exemplo: $2x^2 = 0$.

- $2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0.$

Resolução de equações completas
$ax^2 + bx + c = 0$

- A resolução desse tipo de equação é feita com o auxílio da fórmula de Bhaskara. Essa fórmula aponta que as raízes de uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pela seguinte relação:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{ em que } \Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

Passo a passo para utilizar a fórmula de Bhaskara.

Para resolver uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, podemos seguir os seguintes passos:

1. Identificar os valores dos coeficientes a, b e c;
2. Calcular o valor de Δ (Delta). Para isso, basta usar a fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$;
3. Substituir o valor encontrado na fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
4. Calcular as raízes. Para isso, separamos o $\pm$, de modo que uma raiz fique com o + e a outra com o - . Ou seja:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 10

- Resolva a equação $x^2 + 3x - 4 = 0.$

1. Observem que $a = 1, b = 3 \; e \; c = -4$

2. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$
$$\Delta = 9 + 16$$
$$\Delta = 25$$

3. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

4. $x' = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad e \quad x'' = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

Logo, as raízes da equação são 1 e – 4.

Exemplo 11

- Resolva a equação $x^2 - 10x + 9 = 0.$

1. Observem que $a = 1, b = -10 \; e \; c = 9$

2. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$
$$\Delta = 100 - 36$$
$$\Delta = 64$$

3. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

4. $x' = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad e \quad x" = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Logo, as raízes da equação são 1 e 9.

Exemplo 12

- Resolva a equação $2x^2 - 32 = 0$.

1. Observem que $a = 2, b = 0\ e\ c = -32$

2. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-32)$$
$$\Delta = 0 + 256$$
$$\Delta = 256$$

3. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 2} = \frac{0 \pm 16}{4}$$

4. $x' = \frac{0+16}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad e \quad x'' = \frac{0-16}{4} = \frac{-16}{4} = -4$

Logo, as raízes da equação são – 4 e 4.

Exemplo 13

- Resolva a equação $3x^2 + 18x = 0$.

1. Observem que $a = 3, b = 18\ e\ c = 0$

2. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0$$
$$\Delta = 324\ - 0$$
$$\Delta = 324$$

3. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm 18}{6}$$

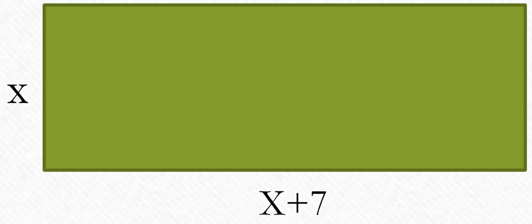
4. $x' = \frac{-18+18}{6} = \frac{0}{6} = 0 \quad e \quad x" = \frac{-18-18}{6} = \frac{-36}{6} = -6$

Logo, as raízes da equação são – 6 e 0.

Exemplo 14

- Em um retângulo com 30m² de área, sabe-se que o comprimento é 7m maior que a largura. Quais as dimensões desse retângulo?

- Solução:



$$x \cdot (x + 7) = 30$$
$$x^2 + 7x - 30 = 0$$
$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)$$
$$\Delta = 49 + 120 = 169$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 13}{2}$$
$$x' = \frac{-7 + 13}{2} = 3 \; e \; x'' = \frac{-7 - 13}{2} = -10 (não\ convém)$$

Logo, as dimensões do retângulo são 3m e 10m.

Quantidade de raízes de uma equação e o descriminante (Delta)

- Observem os 3 exemplos a seguir:

Ex.1: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$a = 1; b = -4 \ e \ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$

$\Delta = 16 + 20$

$\Delta = 36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

- Ex.2: $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$a = 1; b = -6 \; e \; c = 9$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$
$$\Delta = 36 - 36$$
$$\Delta = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{6 \pm 0}{2}$$
$$x' = \frac{6+0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x'' = \frac{6-0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

- Ex.3: $x^2 + 2x + 10 = 0$

$$a = 1; b = 2 \; e \; c = 10$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$
$$\Delta = 4 - 40$$
$$\Delta = -36$$
$$\nexists \; raízes \; reais!$$

Quantidade de raízes de uma equação e o descriminante (Delta)

- De acordo com o valor de Δ, podem ocorrer três casos:

- Se $\Delta > 0$, a equação do 2º grau possui **duas raízes reais distintas.**
- Se $\Delta = 0$, a equação do 2º grau possui **duas raízes reais iguais.**
- Se $\Delta < 0$, a equação do 2º grau **não possui raízes reais.**

Soma das raízes de uma equação do 2º grau

Dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$$x' + x" = \frac{-b}{a}$$

Exemplo: Na equação $x^2 - 4x - 5 = 0$, vimos que $x' = 5$ e $x" = -1$, ou seja, $x' + x" = 5 + (-1) = 5 - 1 = 4$. Por outro lado, $\frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = \frac{4}{1} = 4$.

Produto das raízes de uma equação do 2º grau

Dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$$x' \cdot x" = \frac{c}{a}$$

Exemplo: Na equação $x^2 - 4x - 5 = 0$, vimos que $x' = 5$ e $x" = -1$, ou seja, $x' \cdot x" = 5 \cdot (-1) = -5$. Por outro lado, $\frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$.

Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Dada uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow a \cdot (x - x'). (x - x'') = 0}$$

Exemplo: Na equação $x^2 - 4x - 5 = 0$, vimos que $x' = 5$ e $x'' = -1$, ou seja

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \leftrightarrow 1 \cdot (x - 5) \cdot \big(x - (-1)\big) = 0$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{(x - 5) \cdot (x + 1) = 0}$$

Desse modo, $(x - 5) \cdot (x + 1) = 0$ é a forma fatorada da equação $x^2 - 4x - 5 = 0$.