



Progressão Geométrica

Prof. Msc. Wagner Santiago de Souza

Progressão Geométrica (P.G.)

- São sequências numéricas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com uma constante q (Razão da P.G.). Ou seja, em todas as progressões geométricas, temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ com } n \in N \text{ e } n \geq 2.$$

- Exemplo: A sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64) é uma P.G. de razão $q = 2$, pois $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$, $16 = 8 \cdot 2$, $32 = 16 \cdot 2$ e $64 = 32 \cdot 2$.

Razão da P.G.

► Em qualquer P.A. de razão q , temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \leftrightarrow q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Ou seja,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Exemplo

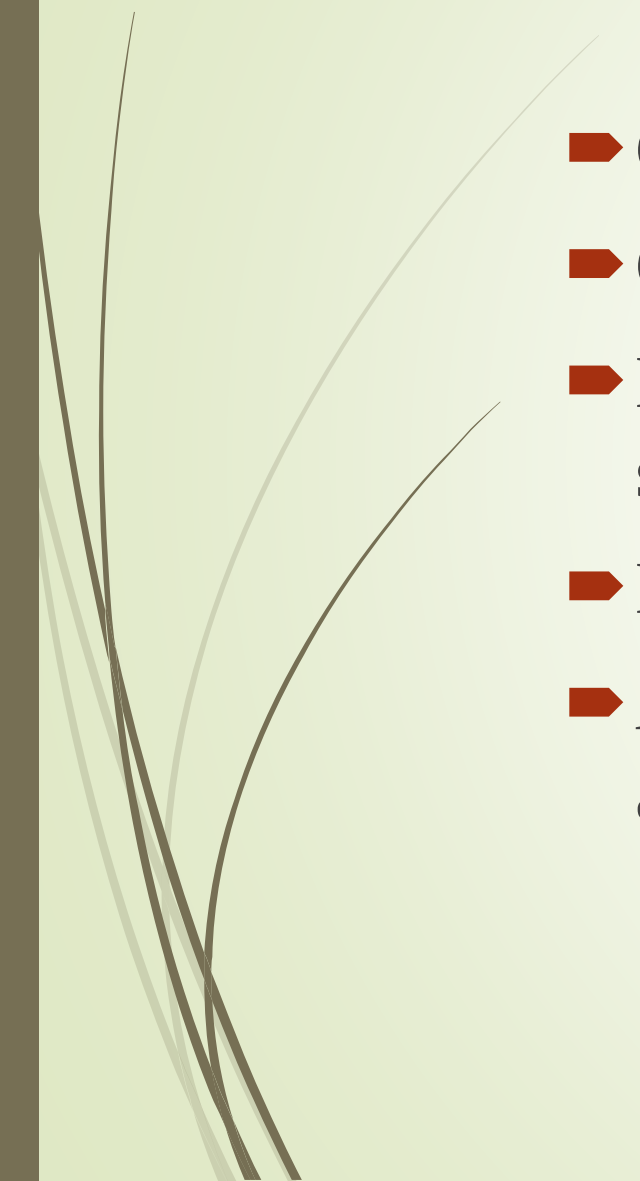
- (PUC-RJ) A sequência $(2, x, y, 8)$ representa uma progressão geométrica. O produto xy vale
- a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16.

Solução: Observem que $q = \frac{x}{2}$ e $q = \frac{8}{y}$, logo;

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{y} \rightarrow xy = 16.$$



Classificação

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior.
 - Constante: Quando todos os termos são iguais entre si.
 - Estacionária: Quando todos os termos, a partir do segundo, são nulos.
 - Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior.
 - Alternante: Quando cada termo tem sinal contrário ao do anterior ($q < 0$).
- 

Exemplos (Classificação)

- Crescente: $(2, 6, 18, 54, \dots)$, $(-60; -30; -15; -7,5; \dots)$.
- Constante: $(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$
- Estacionária: $(6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$
- Decrescente: $(81, 27, 9, 3, 1)$, $(-5, -10, -20, -40, \dots)$
- Alternante: $(1, -4, 16, -64, 256)$, $(-2, 4, -8, 16, -32, \dots)$

Notações especiais

- P.G. de três termos:

$$\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right) \text{ ou } (x, x \cdot q, x \cdot q^2)$$

- P.G. de quatro termos:

$$(x, x \cdot q, x \cdot q^2, x \cdot q^3)$$

- P.A. de cinco termos:

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right) \text{ ou } (x, x \cdot q, x \cdot q^2, x \cdot q^3, x \cdot q^4)$$

Exemplo

➤ (PUC-RJ) Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1m de altura, e cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será

a) 121m b) 81m c) 32m d) 21m e) 15m.

Solução: Encontraremos a seguir a altura das 5 caixas:

Caixa 1 = 1m, Caixa 2 = 3m, Caixa 3 = 9m, Caixa 4 = 27m e Caixa 5 = 81m.

Assim a altura da pilha é $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121\text{m}$.

Propriedade

► Dada uma P.G. qualquer $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$, temos:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Ou seja,

$$(a_2)^2 = a_1 \cdot a_3, (a_3)^2 = a_2 \cdot a_4, (a_4)^2 = a_3 \cdot a_5, \dots$$

Exemplo

- Sabendo que a sequência $(x, x + 2, 2x + 4, \dots)$ é uma P.G. crescente, determine sua razão.

Solução: Aplicando a propriedade, temos:

$$(x + 2)^2 = x \cdot (2x + 4)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 4x$$

$$2x^2 - x^2 + 4x - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2.$$

Desse modo, temos $(2, 4, 8)$ ou $(-2, 0, 0)$. Como a P.G. $(2, 4, 8)$ é a única crescente, a razão é $q = 2$.

Fórmula do termo geral da P.G.

➡ Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q , temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Fórmula do termo geral da P.G.

- Dada uma P.G. de razão q e ordem n , o termo a_n é dado pela seguinte expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde

a_n é um termo qualquer da P.G.

n é a posição do termo a_n

a_1 é o primeiro termo da P.G.

q é a razão da P.G.

Exemplo

- Determine o sétimo termo da P.G. (5,10,20,...).

Solução: Na P.G., temos que $a_1 = 5$ e $q = 2$. Assim:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$

$$a_7 = 5 \cdot 2^6$$

$$a_7 = 5 \cdot 64$$

$$a_7 = 320.$$

Exemplo

➡ A P.G. $\left(10, 2, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{625}\right)$ possui quantos termos?

Solução: Observando a P.G., notamos que $a_1 = 10$ e $q = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Desse modo, para saber o número de termos da P.G., devemos descobrir qual a posição do termo $a_n = \frac{2}{625}$. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow \frac{2}{625} = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{2}{625} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{3125} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \rightarrow n - 1 = 5 \rightarrow n = 6.$$

Logo, a P.G. possui 6 termos.

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

- Para somar os n primeiros termos de uma P.G., podemos utilizar a fórmula a seguir:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ com } q \neq 1.$$

Onde

- a_1 é o primeiro termo somado;
- q é a razão da P.G.;
- n é o número de termos somados.

Exemplo

- Uma fábrica de painéis inaugurada em 2014 produziu 500 painéis nesse mesmo ano. Considerando que sua produção triplica a cada ano, em 2019, o dono da fábrica pôde dizer que, em toda a história da fábrica, foram produzidas quantas painéis?

Solução: O número de painéis produzidos nos anos formam a P.G. (500,1500,4500,...). O valor procurado é a soma dos 6 primeiros termos dessa P.G., logo esse valor é:

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{500 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{500 \cdot 728}{2} = 182000.$$

Soma dos termos de uma P.G. infinita

- ➡ O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão q , com $-1 < q < 1$, é dado pela seguinte expressão:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Onde

S_n é o limite da soma infinitos termos da P.G.

a_1 é o primeiro termo da P.G.

Q é a razão da P.G.

Exemplo

► Qual o valor da soma $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$?

Solução: Observando o enunciado, percebemos que devemos somar os termos de uma P.G. infinita com $a_1 = 4$ e $q = \frac{1}{2}$. Aplicando a fórmula, temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{2}{1} = 8.$$