Radiciação

Prof. Msc. Wagner Santiago de Souza

Raiz quadrada

- Dados dois números $\mathrm{m} \geq 0 \; e \; a \geq 0$, temos que $\sqrt{m} = a \; se \; a^2 = \mathrm{m}.$

$$\text{Ex1. } \sqrt{16} = 4, pois \; 4^2 = 16;$$

$$\text{Ex2. } \sqrt{49} = 7, pois \; 7^2 = 49;$$

$$\text{Ex3. } \sqrt{144} = 12, pois \; 12^2 = 144.$$

$$\sqrt[n]{m}$$

- Dados três números $n \geq 2, \mathrm{m} \geq 0 \; e \; a \geq 0$, temos que $\sqrt[n]{m} = a \; se \; a^{\mathrm{n}} = \mathrm{m}.$

- Ex1. $\sqrt[3]{125} = 5, pois \; 5^3 = 125.$
- Ex2. $\sqrt[4]{81} = 3, pois \; 3^4 = 81.$
- Ex3. $\sqrt[5]{32} = 2, pois \; 2^5 = 32.$

Observação: os Valores de m e a podem ser negativos, desde que n seja ímpar.

- Ex4. $\sqrt[3]{-8} = -2, pois \; (-2)^3 = -8.$

Algumas propriedades dos radicais

- De modo geral, sendo m um número real positivo e n um número natural maior que 1, temos que $\sqrt[n]{m^n} = m$. **Observação:** essa propriedade também é válida se m for um número real negativo e n um número ímpar maior do que 1.

- De modo geral, sendo m e k números reais positivos e n um número natural maior do que 1, temos: $\sqrt[n]{m \cdot k} = \sqrt[n]{m} \cdot \sqrt[n]{k}$ e $\sqrt[n]{\frac{m}{k}} = \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[n]{k}}$.

Como calcular raiz quadrada?

Para calcular $\sqrt{m}$, devemos seguir os seguintes passos:

1: Fatorar o número m (Decompor em fatores primos);

2: Agrupar de dois em dois fatores iguais, obtendo assim, potências de expoente 2;

3: Substituir o número m, dentro da raiz, pela multiplicação das potências de expoente 2, obtidas no passo 2;

4: Tirar da raiz as bases das potências do passo 2, mantendo a operação de multiplicação;

5: Resolver a multiplicação obtida no passo 4.

Exemplo 1

- $\sqrt{144}$

144	2	
72	2	2^2
36	2	
18	2	2^2
9	3	
3	3	3^2
1		

- $\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
- Logo, $\sqrt{144} = 12$.

Exemplo 2

- $\sqrt{441}$

441	3	
147	3	3^2
49	7	
7	7	7^2
1		

- $\sqrt{3^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 7 = 21$
- Logo, $\sqrt{441} = 21$.

Como simplificar raiz quadrada?

Para simplificar $\sqrt{m}$, devemos seguir os seguintes passos:

1: Fatorar o número m (Decompor em fatores primos);

2: Agrupar, quando possível, de dois em dois fatores iguais, obtendo assim, potências de expoente 2 e fatores simples;

3: Substituir o número m, dentro da raiz, pela multiplicação das potências de expoente 2 e dos fatores simples, obtidos no passo 2;

4: Tirar da raiz as bases das potências e deixar na raiz os fatores simples, mantendo a operação de multiplicação;

5: Resolver as multiplicações obtidas no passo 4.

Exemplo 3

- $\sqrt{360}$

360	2	
180	2	2^2
90	2	2
45	3	
15	3	3^2
5	5	5
1		

$$\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 6\sqrt{10}.$$

Logo, $\sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

Exemplo 4

- $\sqrt{48}$

48	2	
24	2	2^2
12	2	
6	2	2^2
3	3	3
1		

$$\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Logo, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Como calcular $\sqrt[n]{m}$?

Para calcular $\sqrt[n]{m}$, devemos seguir os seguintes passos:

1: Fatorar o número m (Decompor em fatores primos);

2: Agrupar de n em n fatores iguais, obtendo assim, potências de expoente n;

3: Substituir o número m, dentro da raiz, pela multiplicação das potências de expoente n, obtidas no passo 2;

4: Tirar da raiz as bases das potências do passo 2, mantendo a operação de multiplicação;

5: Resolver a multiplicação obtida no passo 4.

Exemplo 5

- $\sqrt[3]{216}$

216	2	
108	2	
54	2	2^3
27	3	
9	3	
3	3	3^3
1		

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Logo, $\sqrt[3]{216} = 6$.

Exemplo 6

- $\sqrt[4]{256}$

$$
\begin{array}{r|ll}
256 & 2 & \\
128 & 2 & \\
64 & 2 & \\
32 & 2 & 2^4 \\
\hline
16 & 2 & \\
8 & 2 & \\
4 & 2 & \\
2 & 2 & 2^4 \\
\hline
1 & &
\end{array}
$$

$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4} = 2 \cdot 2 = 4.$

Logo, $\sqrt[4]{256} = 4.$

Como simplificar $\sqrt[n]{m}$?

Para simplificar $\sqrt[n]{m}$, devemos seguir os seguintes passos:

1: Fatorar o número m (Decompor em fatores primos);

2: Agrupar, quando possível, de n em n fatores iguais, obtendo assim, potências de expoente n, potências com expoente menor que n e fatores simples;

3: Substituir o número m, dentro da raiz, pela multiplicação das potências de expoente n, das potências com expoente menor que n e dos fatores simples, obtidos no passo 2;

4: Tirar da raiz as bases das potências de expoente n e deixar na raiz as potências de expoente menor que n e os fatores simples, mantendo a operação de multiplicação;

5: Resolver as multiplicações obtidas no passo 4.

Exemplo 7

- $\sqrt[3]{360}$

360	2	
180	2	
90	2	2^3
45	3	
15	3	3^2
5	5	5
1		

$$\sqrt[3]{360} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{3^2 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{45}.$$

Logo, $\sqrt[3]{360} = 2\sqrt[3]{45}$.

Exemplo 8

- $\sqrt[5]{960}$

960	2	
480	2	
240	2	
120	2	
60	2	2^5
30	2	2
15	3	3
5	5	5
1		

$$\sqrt[5]{960} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt[5]{30}.$$

Logo, $\sqrt[5]{960} = 2\sqrt[5]{30}$.

Operações com radicais

- Soma e subtração com radicais:

Ex1.: $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 + 2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Ex2.: $7\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = (7 - 4)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

Ex3.: $5\sqrt{2} + \sqrt{3} = 5\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Ex4.: $7\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + \sqrt{2} - 4\sqrt{5} = (7 + 1)\sqrt{2} + (6 - 4)\sqrt{5} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

Operações com radicais

- Multiplicação

Ex1.: $3 \cdot 2\sqrt[4]{7} = (3 \cdot 2)\sqrt[4]{7} = 6\sqrt[4]{7}$

Ex2.: $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{3 \cdot 5} = 4\sqrt{15}$

Ex3.: $3\sqrt[3]{7} \cdot 4\sqrt[3]{3} = (3 \cdot 4)\sqrt[3]{7 \cdot 3} = 12\sqrt[3]{21}$

Operações com radicais

- Divisão

Ex1.: $\frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

Ex2.: $\frac{4\sqrt[3]{5}}{2} = (4 \div 2)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

Ex3.: $\frac{6\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = (6 \div 3)\sqrt{10 \div 2} = 2\sqrt{5}$

Racionalização de denominador

- Racionalizar um denominador é transformar uma fração em outra equivalente de maneira que não haja radical no denominador.

- Como racionalizar frações que possuem raízes quadradas no denominador?

1) Quando a fração tem apenas uma raiz quadrada no denominador, devemos multiplicar o numerador e o denominador por essa mesma raiz quadrada.

$$\text{Ex.}: \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Quando a fração tem o produto de um número por uma raiz quadrada no denominador, devemos multiplicar o numerador e o denominador por essa mesma raiz quadrada.

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

3) Quando a fração tem, no denominador, uma soma ou uma subtração com pelo menos uma raiz quadrada, devemos multiplicar o numerador e o denominador pela operação inversa a do denominador dessa fração.

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (2-\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{5 \cdot 2 - 5 \cdot \sqrt{3}}{4-3} = \frac{10-5\sqrt{3}}{1} = 10 - 5\sqrt{3}$$

Lembrete: Produtos notáveis

- $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$Logo, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$Logo, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- $(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

$$Logo, (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$