LOGARITMOS

1. Elementos e definição

- O *logaritmo* de um número ***b*** (chamado de *logaritmando*) na *base* ***a*** é o expoente ***c*** ao qual ***a*** é elevado para resultar no valor ***b***. Simbolicamente podemos representar por:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

a: base ***c***: logaritmo
b: logaritmando

- A seguir temos alguns exemplos.

- $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$.
- $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$.
- $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$, pois $5^{-2} = \dfrac{1}{25}$.
- $\log_7 \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}$, pois $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$.
- $\log_{10} 1.000.000 = 6$, pois $10^6 = 1.000.000$.
- $\log_{10} 0{,}0001 = -4$, pois $10^{-4} = 0{,}0001$.
- $\log_6 1 = 0$, pois $6^0 = 1$.
- $\log_8 8 = 1$, pois $8^1 = 8$.

- Observe que os dois últimos exemplos valeriam independentemente de qual fosse a base. Assim, podemos afirmar que

- $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, para todo valor de *a*.
- $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo valor de *a*.

Essas duas relações são extremamente úteis pois ocorrem com bastante frequência na resolução de questões.

- Juntamente com essas duas relações, porém não sendo cobrada de maneira tão frequente, também é válida a expressão

$$a^{\log_a b} = b$$

- Essas três relações são conhecidas por ***consequências da definição***. A seguir temos alguns exemplos.

- $\log_{17} 1 = 0$
- $\log_\pi \pi = 1$
- $5^{\log_5 4} = 4$

EXERCÍCIO DE AULA

01) (UFPR 2013 – Modificada) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão

$$S = -18 \cdot \log(t+1) + 86.$$

a) Imediatamente após o teste ter sido aplicado, que percentual da informação inicial era lembrado?
b) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

OBSERVAÇÃO

A base igual a 10 é a base "padrão" dos logaritmos que são chamados de ***logaritmos decimais***. Então, em uma situação em que a base seja omitida, devemos considerar que essa base é igual a 10.

- Os logaritmos são usados para representar números que não se consegue determinar o valor sem a necessidade de cálculos mais complexos ou ferramentas computacionais. Por exemplo, o valor de *x* na equação $2^x = 9$ pode ser representado por $x = \log_2 9$. Esse recurso não é novo, já sendo usado em outras situações na Matemática. Por exemplo, para representar o valor positivo de *x* na equação $x^2 = 7$, usamos $x = \sqrt{7}$.

OBSERVAÇÃO

Para evitar alguns problemas que podem ocorrer posteriormente, vamos garantir que o *logaritmando* e *base* do logaritmo sejam números positivos e que a base seja um número diferente de 1. Essas condições são chamadas de *condições de existência*.

Condições de existência

$$\log_a b = x \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

Dessa forma, os logaritmos a seguir NÃO EXISTEM por não respeitarem as condições de existência.

$\log_3 0$	$\log_0 5$	$\log_1 7$
$\log_2(-4)$	$\log_{(-2)} 16$	$\log_{(-3)}(-27)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Quais os valores de ***x*** que fazem com que a expressão $y = \log(5x - 18)$ exista?

Resolução:

Observe inicialmente que a base não aparece e, portanto, é igual a 10 sendo, dessa forma, já um número positivo e diferente de 1.

Como o logaritmando é 5x – 18, temos:

$$5x-18>0$$
$$5x>18$$
$$x>18/5 \text{ ou } x>3,6$$

Assim, a expressão só existirá se x > 3,6.

2. Equações logarítmicas

- As equações logarítmicas são equações em que a incógnita está no interior de um logaritmo. Para resolvermos uma equação logarítmica devemos inicialmente isolar o logaritmo em um dos lados da equação e, em seguida, aplicar a definição.

EXERCÍCIOS DE AULA

02) Resolva as seguintes equações logarítmicas.

a) $\log_2(x+2)=5$

b) $4\log_3(x-40)=16$

c) $12-\log_7(x-1)=10$

d) $2\log_4(x-2)+1=7$

03) (ESPM 2013 – Modificada) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutiva no interior do país, dando origem a um pequeno povoado. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função $P=0,2+\log_2 t$, onde P é a população, em milhares de habitantes, t anos após o início da ocupação. A população dessa cidade atingirá a marca dos 5,2 mil habitantes após

a) 16 anos.
b) 20 anos.
c) 25 anos.
d) 32 anos.
e) 45 anos.

3. Propriedades dos logaritmos

- São três as principais propriedades dos logaritmos:

- *logaritmo do produto:*

$$\log_a(b.c)=\log_a b+\log_a c$$

- *logaritmo da divisão:*

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

- *logaritmo da potência:*

$$\log_a b^n=n.\log_a b$$

- As propriedades dos logaritmos são usadas em diversas situações. Uma das primeiras é no cálculo de valores de logaritmos, conforme veremos nos exercícios a seguir.

EXERCÍCIOS DE AULA

04) Calcule os logaritmos a seguir.

a) $\log_2 32$

b) $\log 100000$

c) $\log_7 \frac{1}{49}$

05) O aquecimento de um forno de precisão será feito de modo que sua temperatura ***T***, em ºC, será controlada para variar de acordo com a função $T=30.\log_2(3t+1)+25$, sendo ***t*** o tempo, em minutos, decorridos desde o início do aquecimento.

a) Qual a temperatura do forno no instante em que é iniciado o aquecimento?
b) Qual a temperatura do forno 5 minutos após o início do aquecimento?
c) Após quantos minutos a temperatura atingirá 205 ºC?

- Em todos os itens das questões anteriores, o logaritmando é uma potência da base. Entretanto, há situações em que isso não ocorre e, nesses casos, devemos recorrer a outras possibilidades (e valores numéricos previamente fornecidos) para o cálculo dos logaritmos, o que será visto no exercício a seguir.

EXERCÍCIO DE AULA

06) Sabendo que $\log 2=0,30$ e $\log 3=0,48$, calcule cada um dos logaritmos a seguir.

a) $\log 16$

b) $\log 0,2$

c) $\log 6$

d) $\log 18$

e) $\log 5$

f) $\log 0,003$

g) $\log 1,08$

- Uma aplicação de extrema importância dos logaritmos é a resolução de equações exponenciais em que não é possível obter uma igualdade entre as bases. Nesses casos, aplicamos o logaritmo em ambos os lados da equação e, utilizando as propriedades, obtemos o resultado.

EXERCÍCIOS DE AULA

07) Utilizado os valores encontrados na questão anterior, resolva as equações exponenciais a seguir.

a) $2^x=3$

b) $5.3^x=90$

c) $10000.1,08^x-5000=40000$

d) $\dfrac{200.1,08^x}{1,08^x-1}=300$

08) O número ***N*** de pessoas que tomaram conhecimento de uma notícia ***t*** horas após a sua ocorrência é dada pela função $N = 30.4^t$. Após quantas horas aproximadamente 2160 pessoas estarão sabendo da ocorrência dessa notícia? Use $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, caso necessário.

a) 2 horas e 36 minutos
b) 2 horas e 48 minutos
c) 3 horas e 6 minutos
d) 3 horas e 15 minutos
e) 3 horas e 20 minutos

OBSERVAÇÃO

Os ***logaritmos neperianos*** (ou logaritmos naturais) são logaritmos em que a base é o número ***e***. O número ***e*** é um número irracional que vale aproximadamente 2,72. O $\log_e x$ pode ser representado de forma mais simples por $\ln x$.

$$\log_e x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln x}$$

EXERCÍCIO DE AULA

09) A população ***P***, em milhares de habitantes, de uma pequena cidade do interior de Sergipe, é aproximada pela função $P = 8.e^{0,01t}$, em que ***t*** é o tempo em anos após 2018. Use $\ln 2 = 0,69$ e $\ln 3 = 1,10$, caso necessário.

A população dessa cidade atingirá 9 mil habitantes no ano

a) 2020
b) 2023
c) 2028
d) 2031
e) 2035

➢ Ainda existem três outras propriedades de logaritmos. São elas:

- *logaritmo da potência na base:*

$$\boxed{\log_{a^n} b = \frac{1}{n}.\log_a b}$$

- *mudança de base:*

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \to \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

- *igualdade de logaritmos:*

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \quad \to \quad b = c}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Usando $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, caso necessário, calcule os logaritmos a seguir.

a) $\log_{16} 2$ b) $\log_{81} 27$ c) $\log_2 9$

Resolução:

a) $\log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}.\log_2 2 = \frac{1}{4}.1 = \frac{1}{4}$

b) $\log_{81} 27 = \log_{3^4} 3^3 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log_3 3 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{4}$

c) $\log_2 9 = \frac{\log 9}{\log 2} = \frac{\log 3^2}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 2} = \frac{2 \cdot 0,48}{0,30} = 0,32$

4. Função logarítmica

➢ É toda função com a forma $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Para termos uma noção inicial da forma do gráfico de uma função logarítmica, devemos perceber que a função $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função $g(x) = a^x$.

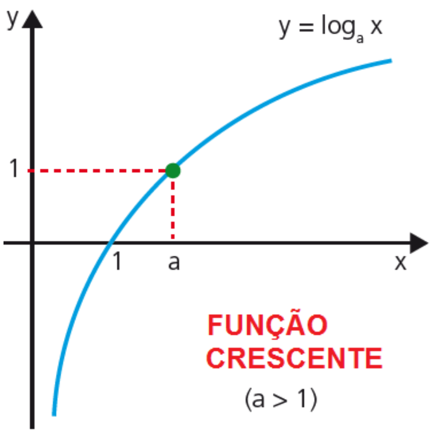
$f(x) = \log_a x$ $y = \log_a x$	Aplicando a definição: $y = a^x$
A expressão da inversa será: $x = \log_a y$	$g(x) = a^x$ ou $f^{-1}(x) = a^x$

➢ Uma vez que percebemos que a função $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função $g(x) = a^x$, podemos conhecer os seus gráficos e crescimentos de um modo mais simples.

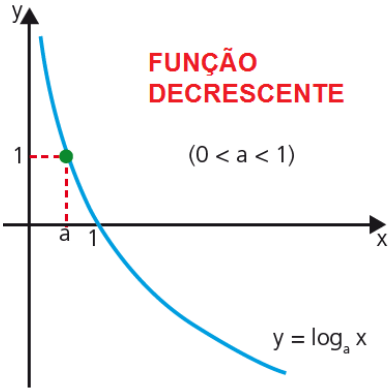
4.1. Gráfico e crescimento

➢ Teremos duas situações:

1° tipo) **A base é maior que 1**



2° tipo) **A base está entre 0 e 1**



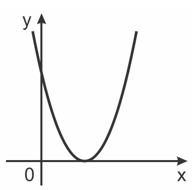
- Em ambos os casos, o gráfico da função não intersecta o eixo y já que, devido às condições de existência do logaritmo, devemos ter x > 0. Ainda em ambos os casos, o único ponto de intersecção com o eixo x (raiz da função) é x = 1.

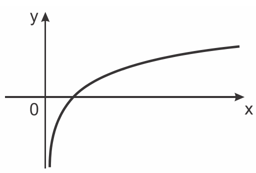
EXERCÍCIO DE AULA

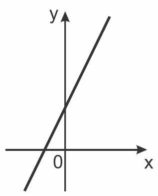
10) **(UEL 2016)** Um dos principais impactos das mudanças ambientais globais é o aumento da frequência e da intensidade de fenômenos extremos, que quando atingem áreas ou regiões habitadas pelo homem, causam danos. Responsáveis por perdas significativas de caráter social, econômico e ambiental, os desastres naturais são geralmente associados a terremotos, tsunamis, erupções vulcânicas, furacões, tornados, temporais, estiagens severas, ondas de calor etc.

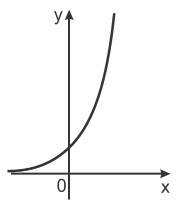
(Disponível em: <www.inpe.br>. Acesso em: 20 maio 2015.)

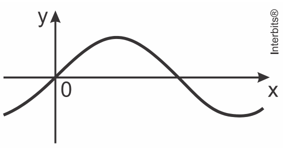
Em relação aos tremores de terra, a escala Richter atribui um número para quantificar sua magnitude. Por exemplo, o terremoto no Nepal, em 12 de maio de 2015, teve magnitude 7,1 graus nessa escala. Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto pode ser descrita por uma função logarítmica, na qual x representa a energia liberada pelo terremoto, em quilowatts-hora, assinale a alternativa que indica, corretamente, o gráfico dessa função.

a)


b)


c)


d)


e)


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) **(U.F.Pelotas – Modificada)** A lei que mede o ruído é definida pela expressão $R = 120 + 10\log I$, em que I é a intensidade sonora, medida em W/m^2 e R é a medida do ruído, em decibéis (dB).

Nosso ouvido capta sons a partir de 0dB, e uma conversa normal gira em torno de 60dB. Já em níveis acima de 100dB, apenas 3 minutos já são suficientes para dano às células auditivas.

A intensidade sonora I para um som de 100 dB é igual a

a) 10^{-12} W/m^2
b) 10^{-2} W/m^2
c) 10 W/m^2
d) 10^2 W/m^2
e) 10^{12} W/m^2

02) Há diversas formas de analisar a intensidade de um terremoto. Uma delas é a Escala Richter, que utiliza a fórmula $R = \frac{2}{3}.\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que ***R*** é a magnitude do terremoto na escala Richter e ***E*** é a energia liberada pelo terremoto na unidade kWh, sendo $E_0 = 7.10^{-3}\,\text{kWh}$.

Considerando $\log 7 = 0,85$, se um terremoto atingir a magnitude 7,5 na Escala Richter, a energia liberada por ele, em kWh, será igual a

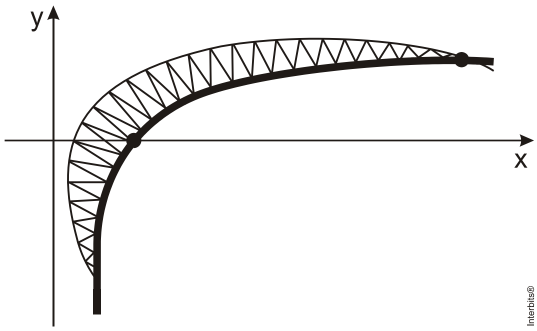
a) $10^{2,85}$.
b) $10^{9,1}$.
c) $10^{13,4}$.
d) $10^{15,1}$.
e) $10^{24,1875}$.

03) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outro elemento). Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de um elemento radioativo com inicialmente m0 gramas se decomponha segundo a equação matemática: $m(t) = m_0.10^{\frac{-t}{70}}$, onde ***m(t)*** é a quantidade de massa radioativa no tempo ***t*** (em anos).

Usando a aproximação $\log 2 = 0,30$, para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial passarão

a) 63 anos.
b) 72 anos.
c) 85 anos.
d) 97 anos.
e) 108 anos.

04) (PUC-RS 2014) O modelo da cobertura que foi colocada no Estádio Beira-Rio está representado na figura abaixo.



Colocada devidamente em um plano cartesiano, é possível afirmar que, na forma em que está, a linha em destaque pode ser considerada uma restrição da representação da função dada por

a) $y = \log(x)$ b) $y = x^2$ c) $y = |x|$
d) $y = \sqrt{-x}$ e) $y = 10^x$

05) (Fac. Albert Einstein - Medicina 2016) Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30 \cdot \log_3(t+21) + 150$, em que t é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa, Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

a) 325 b) 400 c) 450 d) 525 e) 600

06) (EsPCEx 2017) O número N de bactérias de uma cultura é dado em função do tempo t (em minutos), pela fórmula $N(t) = (2{,}5)^{1{,}2t}$. Considere $\log_{10} 2 = 0{,}3$, o tempo (em minutos) necessário para que a cultura tenha 10^{84} bactérias é

a) 120 b) 150 c) 175 d) 185 e) 205

07) (USF 2016) O número de bactérias de uma determinada cultura pode ser modelado utilizando a função $B(t) = 800 \cdot 2^{\frac{t}{40}}$, sendo B o número de bactérias presentes na cultura e t o tempo dado em horas a partir do início da observação. Aproximadamente, quantas horas serão necessárias para se observar 5.000 bactérias nessa cultura? Considere $\log 2 \cong 0{,}30$.

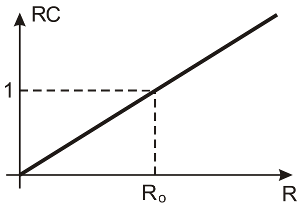
a) 10 horas.
b) 50 horas.
c) 110 horas.
d) 150 horas.
e) 200 horas.

08) (INSPER 2011) Escalas logarítmicas são usadas para facilitar a representação e a compreensão de grandezas que apresentam intervalos de variação excessivamente grandes. O pH, por exemplo, mede a acidez de uma solução numa escala que vai de 0 a 14; caso fosse utilizada diretamente a concentração do íon H^+ para fazer essa medida, teríamos uma escala bem pouco prática, variando de $0{,}00000000000001$ a 1.

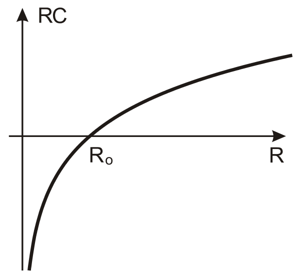
Suponha que um economista, pensando nisso, tenha criado uma medida da renda dos habitantes de um país chamada Renda Comparativa (RC), definida por $RC = \log\left(\frac{R}{R_0}\right)$, em que R é a renda, em dólares, de um habitante desse país e R_0 é o salário mínimo, em dólares, praticado no país. (Considere que a notação log indica logaritmo na base 10.)

Dentre os gráficos abaixo, aquele que melhor representa a Renda Comparativa de um habitante desse país em função de sua renda, em dólares, é

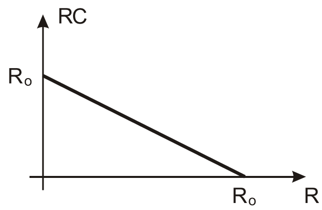
a)



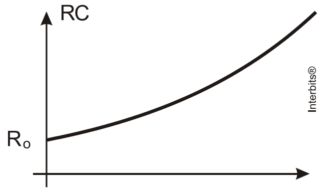
d)



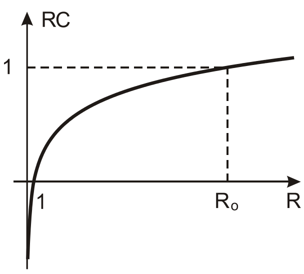
b)



e)



c)



09) (UFPR 2012) Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em lumens, a uma profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x$$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de 12,5 cm?

a) 150 lumens. b) 15 lumens. c) 10 lumens.
d) 1,5 lumens. e) 1 lúmen.

10) (ACAFE 2017) Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada. A quantidade de medicamentos, em miligramas, presente no organismo de um paciente é calculada pela função $Q(t) = 30 \cdot 2^{1-\frac{t}{10}}$, onde t é o tempo dado em horas.

O tempo necessário para que a quantidade de medicamento em um paciente se reduza a 40% da quantidade inicial, é:

Dado: log 2 = 0,3

a) 13 horas e 33 minutos.
b) 13 horas e 20 minutos.
c) 8 horas e 12 minutos.
d) 6 horas e 40 minutos.
e) 6 horas e 06 minutos.

11) (UNICAMP 2013) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função $T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$, sendo *t* o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) $12[\log(7) - 1]$ minutos.
b) $12[1 - \log(7)]$ minutos.
c) $12\log(7)$ minutos.
d) $[1 - \log(7)]/12$ minutos.
e) $[1 - \log(7)]^{12}$ minutos.

12) (UFU 2017) Um indivíduo com uma grave doença teve a temperatura do corpo medida em intervalos curtos e igualmente espaçados de tempo, levando a equipe médica a deduzir que a temperatura corporal T do paciente, em cada instante t, é bem aproximada pela função $T = 36 \cdot 10^{t/100}$, em que t é medido em horas, e T em graus Celsius. Quando a temperatura corporal deste paciente atingir os 40º C a equipe médica fará uma intervenção, administrando um remédio para baixar a temperatura.

Nestas condições, quantas horas se passarão desde o instante $t = 0$ até a administração do remédio? Utilize $\log_{10} 9 = 0,95$.

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

13) (UNESP 2015) No artigo "Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?", o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0) \cdot e^{k \cdot t}$, em que $D(t)$ representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, $D(0)$ a área de desmatamento no instante inicial $t = 0$, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja $0,6\%$ e usando a aproximação $\ln 2 \cong 0,69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente

a) 11. b) 15. c) 51. d) 115. e) 151.

14) (EBMSP 2017) No instante $t = 0$, quando a quantidade presente de determinada substância radioativa começa a ser monitorada, registra-se Q_0 gramas da substância. Depois de t horas, a partir $t = 0$, a quantidade, em gramas, de substância remanescente é calculada através da equação $Q(t) = Q_0 e^{-0,45t}$.

Considerando-se $\ln 2 = 0,69$, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade presente dessa substância seja reduzida à metade da quantidade inicial é de

a) 54 min b) 1 h 20 min c) 1 h 32 min
d) 1 h 45 min e) 2 h 9 min

15) O iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em exames de tireóide e possui meia vida de 8 dias. Um material com 1 g de iodo-131 precisa aguardar um certo tempo para ser descartado de modo a não haver prejuízo ao meio ambiente. Sabendo que para o material poder ser descartado com segurança, a máxima quantidade de iodo-131 na amostra deve ser 10^{-6} g e usando, caso necessário, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, o tempo mínimo que se deve aguardar para o descarte desse material é de

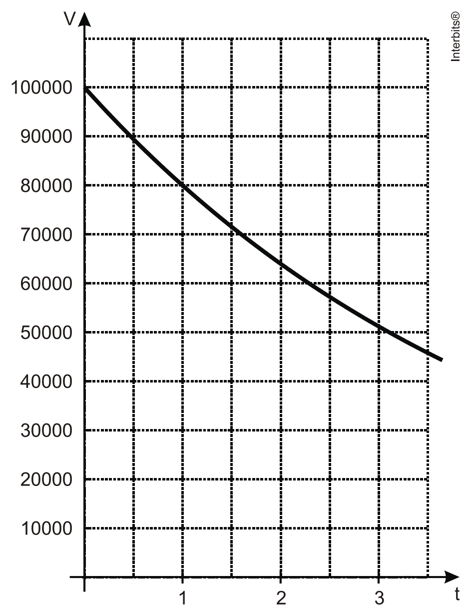
a) 180 dias. b) 160 dias. c) 120 dias.
d) 80 dias. e) 40 dias.

16) A dívida externa de uma país é dada pela expressão $D = 6,775.(1,05)^{t-1}$, sendo ***D***, em bilhões de dólares e ***t*** o tempo, em anos, considerando $t = 0$ o momento atual. Considerando $\log 2 = 0,30$ e $\log 1,05 = 0,02$, após quanto tempo a dívida desse país alcançara 13,55 bilhões de dólares se não houver pagamentos desde então?

a) 4 anos. b) 7 anos. c) 10 anos.
d) 13 anos. e) 16 anos.

17) (INSPER 2012) Uma empresa de transporte de carga estima em 20% ao ano a taxa de depreciação de cada caminhão de sua frota. Ou seja, a cada ano, o valor de seus veículos se reduz em 20%. Assim, o valor V, em reais, de um caminhão adquirido por R$ 100.000,00, *t* anos após sua compra, é dado por $V = 100000 \cdot (0{,}8)^t$.

O gráfico a seguir representa os primeiros 3 anos dessa relação.



Pela política da empresa, quando o valor de um caminhão atinge 25% do valor pelo qual foi comprado, ele deve ser vendido, pois o custo de manutenção passa a ficar muito alto.

Considerando a aproximação $\log 2 = 0{,}30$, os caminhões dessa empresa são vendidos aproximadamente:

a) 3 anos após sua compra.
b) 4 anos após sua compra.
c) 6 anos após sua compra.
d) 8 anos após sua compra.
e) 10 anos após sua compra.

18) (ACAFE 2016) Dentre os carros que mais desvalorizam, os carros de luxo são os que mais sofrem depreciação. Na compra de um carro de luxo no valor de R$ 120.000,00, o consumidor sabe que o modelo adquirido sofre uma desvalorização de 10% ao ano, isto é, o carro tem, a cada instante, um valor menor do que o valor que tinha um ano antes.

Para que o carro perca 70% do seu valor inicial, é necessário que se passe entre: (Use $\log 3 = 0{,}477$)

a) 9 e 10 anos.
b) 12 e 13 anos.
c) 10 e 11 anos.
d) 11 e 12 anos.
e) 13 e 14 anos.

19) (UPE 2012) Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é $M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$ onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

a) 10^{14} joules b) 10^{16} joules c) 10^{17} joules
d) 10^{18} joules e) 10^{19} joules

20) (IFPE 2012 – Modificada) Nas aplicações financeiras feitas nos bancos são utilizados os juros compostos. A expressão para o cálculo é $C_F = C_0(1+i)^T$ em que C_F é o montante, C_0 é o capital, **i** é a taxa e T o tempo da aplicação. Como C_F depende de T, conhecidos C_0 e **i**, temos uma aplicação do estudo de função exponencial.

Um professor, ao deixar de trabalhar em uma instituição de ensino, recebeu uma indenização no valor de R$ 20.000,00. Ele fez uma aplicação financeira a uma taxa anual (**i**) de 8%. Após T anos, esse professor recebeu um montante de R$ 43.200,00. Qual foi o tempo T que o dinheiro ficou aplicado? Use log (1,08) = 0,03 e log (2,16) = 0,33

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

21) O nível de ruído sonoro R, em decibéis (dB), é dado pela expressão $R = 120 + 10 \log I$, sendo I a intensidade sonora, em W/m². Se duas fontes sonoras F_1 e F_2 produzem ruídos iguais a 100 dB e 80 dB, respectivamente, e possuem intensidades sonoras I_1 e I_2, calcule $\frac{I_1}{I_2}$, ou seja, quantas vezes I_1 é maior que I_2?

a) 10 b) 20 c) 50 d) 100 e) 1000

22) (UFPR 2017) Suponha que a quantidade Q de um determinado medicamento no organismo t horas após sua administração possa ser calculada pela fórmula $Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t}$, sendo Q medido em miligramas, a expressão que fornece o tempo t em função da quantidade de medicamento Q é:

a) $t = \log\sqrt{\frac{15}{Q}}$ b) $t = \frac{\log 15}{2\log Q}$ c) $t = 10\sqrt{\log\left(\frac{Q}{15}\right)}$

d) $t = \frac{1}{2}\log\frac{Q}{15}$ e) $t = \log\frac{Q^2}{225}$

23) (UFJF 2015) A magnitude de um terremoto, na escala Richter, é dada por $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ onde E é a energia liberada no evento e E_0 é uma constante fixada para qualquer terremoto. Houve dois terremotos recentemente: um ocorreu no Chile, de magnitude $M_1 = 8{,}2$, e outro, no Japão, de magnitude $M_2 = 8{,}8$, ambos nessa escala.

Considerando E_1 e E_2 as energias liberadas pelos terremotos no Chile e no Japão, respectivamente, é **CORRETO** afirmar:

a) $\frac{E_2}{E_1} = 10$ b) $\frac{E_2}{E_1} = 1$ c) $0 < \frac{E_2}{E_1} < 1$

d) $1 < \frac{E_2}{E_1} < 10$ e) $\frac{E_2}{E_1} > 10$

24) (UDESC 2016) No século XVII, os logaritmos foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar alguns cálculos matemáticos. Com o uso dos logaritmos e com tabelas previamente elaboradas era possível, por exemplo, transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações. Com o auxílio dos logaritmos era possível também realizar, de forma muito mais rápida, as operações de radiciação.

A tabela a seguir é um pequeno exemplo do que era uma tabela de logaritmos.

Tabela de logaritmos

log 1,50	0,176
log 1,52	0,181
log 1,54	0,187
log 1,56	0,193
log 1,58	0,198
log 2	0,301
log 3	0,477
log 4	0,602
log 5	0,699
log 6	0,778
log 7	0,845
log 8	0,903
log 9	0,954

Com base nas informações da tabela acima, pode-se concluir que o valor aproximado para $\sqrt[8]{35}$ é:

a) 1,50
b) 1,52
c) 1,54
d) 1,56
e) 1,58

25) (INSPER 2014) Analisando o comportamento das vendas de determinado produto em diferentes cidades, durante um ano, um economista estimou que a quantidade vendida desse produto em um mês (Q), em milhares de unidades, depende do seu preço (P), em reais, de acordo com a relação

$$Q = 1 + 4\cdot(0{,}8)^{2P}.$$

No entanto, em Economia, é mais usual, nesse tipo de relação, escrever o preço P em função da quantidade Q. Dessa forma, isolando a variável P na relação fornecida acima, o economista obteve

a) $P = \log_{0,8}\sqrt{\frac{Q-1}{4}}.$

b) $P = \log_{0,8}\left(\frac{Q-1}{8}\right).$

c) $P = 0{,}5\cdot\sqrt[0,8]{\frac{Q-1}{4}}.$

d) $P = \sqrt[0,8]{\frac{Q-1}{8}}.$

e) $P = 0{,}5\cdot\log_{0,8}\left(\frac{Q}{4}-1\right).$

26) Para assistir aos jogos da Copa do Mundo, uma pessoa consultou diversas lojas para comprar uma *Smart* TV Led 58''. Em uma das lojas consultadas, o preço à vista dessa TV era R$ 3000,00, porém a loja financiava esse valor usando o sistema *price*. Sabe-se que, no sistema *price*, cada parcela é calculada utilizando a fórmula a seguir:

$$P = \frac{E.(1+i)^n.i}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

Sabe-se que *P* é o valor de cada parcela, *E* é o valor a ser financiado, *i* é a taxa de financiamento, *n* é o número de parcelas, com taxa e número de parcelas considerados em tempos compatíveis, isto é, se as parcelas são consideradas em meses, a taxa aplicada deve ser mensal.

Sabendo que log 1,04 = 0,017 e que log 2 = 0,3, considerando que a loja usa uma taxa de 4% ao mês e que a pessoa só pode dispor, no máximo, de R$ 200,00 por mês para o valor de cada parcela, a quantidade mínima de parcelas para financiar o valor da TV deve ser igual a

a) 23.
b) 24.
c) 25.
d) 54.
e) 98.

EXERCÍCIOS ENEM

01) (ENEM PPL 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2(t+1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

a) 63 b) 96 c) 128 d) 192 e) 255

02) (ENEM PPL 2019) Uma pessoa fez um depósito inicial de R$ 200,00 em um Fundo de Investimentos que possui rendimento constante sob juros compostos de 5% ao mês. Esse Fundo possui cinco planos de carência (tempo mínimo necessário de rendimento do Fundo sem movimentação do cliente). Os planos são:

- Plano A: carência de 10 meses;
- Plano B: carência de 15 meses;
- Plano C: carência de 20 meses;
- Plano D: carência de 28 meses;
- Plano E: carência de 40 meses.

O objetivo dessa pessoa é deixar essa aplicação rendendo até que o valor inicialmente aplicado duplique, quando somado aos juros do fundo. Considere as aproximações: log 2 = 0,30 e log 1,05 = 0,02.

Para que essa pessoa atinja seu objetivo apenas no período de carência, mas com a menor carência possível, deverá optar pelo plano

a) A. b) B. c) C. d) D. e) E.

03) (ENEM 2019) A *Hydrangea macrophyila* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

04) (ENEM 2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_S) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_S) (μm.Hz)
Pequeno	$0 \leq M_S \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_S \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_S \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_S \leq 9,9$
Extremo	$M_S \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_S = 3,30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2.000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

a) Pequeno.
b) Ligeiro.
c) Moderado.
d) Grande.
e) Extremo.

05) (ENEM 2018) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de $R\$\ 820,00$, a uma taxa de juros de $1,32\%$ ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize $0,2877$ como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e $0,0131$ como aproximação para $\ln(1,0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

a) 56ª b) 55ª c) 52ª d) 51ª e) 45ª

06)(ENEM 2018) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100.000 transistores distribuídos em 0,25 cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere $0{,}30$ como aproximação para $\log_{10} 2.$

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

a) 1999 b) 2002 c) 2022 d) 2026 e) 2146

07)(ENEM PPL 2018) A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo de seu pH, dado pela expressão

$$pH = \log_{10} \frac{1}{H},$$

em que H é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico. A classificação da água de acordo com seu pH é mostrada no quadro.

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7{,}5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7{,}5$	Neutra
$3{,}5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3{,}5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração $H,$ uma distribuidora mede dois parâmetros A e $B,$ em cada fonte, e adota H como sendo o quociente de A por $B.$ Em análise realizada em uma fonte, obteve $A = 10^{-7}$ e a água dessa fonte foi classificada como neutra.

O parâmetro $B,$ então, encontrava-se no intervalo

a) $\left(-10^{14,5}, -10^{13}\right]$ b) $\left[10^{-\frac{6}{7}}, 10^{-1}\right)$

c) $\left[10^{-1}, 10^{\frac{1}{2}}\right)$ d) $\left[10^{13}, 10^{14,5}\right)$

e) $\left[10^{6\times10^7}, 10^{7,5\times10^7}\right)$

08)(ENEM PPL 2018) Em março de 2011, um terremoto de $9{,}0$ graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de $7{,}0$ graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$ em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e $\log$ representa o logaritmo na base $10.$

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

a) $1{,}28$ b) $2{,}0$ c) $10^{\frac{9}{7}}$ d) 100 e) $10^9 - 10^7$

09) (ENEM (Libras) 2017) Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de $8{,}9$ graus na escala Richter. A energia liberada E por esse terremoto, em $kWh,$ pode ser calculada por $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$ sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e R a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere $0{,}84$ como aproximação para $\log 7.$

Disponível em: http://oglobo.globo.com. Acesso em: 2 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em $kWh,$ foi de

a) $10^{10,83}$ b) $10^{11,19}$ c) $10^{14,19}$ d) $10^{15,51}$ e) $10^{17,19}$

10) (ENEM 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de $R\$\ 5.000{,}00.$ Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, $R\$\ 400{,}00$ mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a formula

$$P = \frac{5.000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize $0{,}005$ como aproximação para $\log 1{,}013;$ $2{,}602$ como aproximação para $\log 400;$ $2{,}525$ como aproximação para $\log 335.$

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 17.

11) (ENEM PPL 2017) Nas informações veiculadas nos órgãos de comunicação quando da ocorrência de um terremoto, faz-se referência à magnitude (M), que se refere a quantos graus o fenômeno atingiu na escala Richter. Essa medida quantifica a energia liberada no epicentro do terremoto, e em seu cálculo utilizam-se como parâmetros as medidas da amplitude sísmica (A), em micrômetro, e da frequência (f), em hertz. Esses parâmetros são medidos por aparelhos especiais chamados sismógrafos, e relacionam-se segundo a função $M = \log(A \times f) + 3{,}3$. Pela magnitude do terremoto na escala Richter, pode-se estimar seus efeitos de acordo com o quadro, onde não estão considerados terremotos de magnitudes superiores a $7{,}9$.

Magnitude (grau)	Efeitos do terremoto segundo a escala Richter
$M \le 3{,}5$	Registrado (pelos aparelhos), mas não perceptível pelas pessoas.
$3{,}5 < M \le 5{,}4$	Percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
$5{,}4 < M \le 6{,}0$	Destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
$6{,}0 < M \le 6{,}9$	Destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
$6{,}9 < M \le 7{,}9$	Destrutivo, retiraram os edifícios de suas fundações, causam fendas no solo e danificam as tubulações contidas no subsolo.

Um terremoto teve sua amplitude e frequências medidas e obteve-se $A = 1.000$ micrômetros e $f = 0{,}2$ hertz.
Use $-0{,}7$ como aproximação para $\log(0{,}2)$.

Disponível em: www.mundoeducacao.com.br. Acesso em: 11 jul. 2012 (adaptado).

Considerando o quadro apresentado, e analisando o resultado da expressão que fornece a magnitude desse terremoto, conclui-se que ele foi

a) registrado, mas não percebido pelas pessoas.
b) percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
c) destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
d) destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
e) destrutivo, com consequências nas fundações dos edifícios, fendas no solo e tubulações no subsolo.

12) (ENEM 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de $3.000\ °C$ e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use $0{,}477$ como aproximação para $\log_{10}(3)$ e $1{,}041$ como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja $30\ °C$ é mais próximo de

a) 22.
b) 50.
c) 100.
d) 200.
e) 400.

13) (ENEM 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude $9{,}0$ na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude $7{,}0$ na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$
b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$
d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$
e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

14) (ENEM 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de $3.000\ °C$ e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use $0{,}477$ como aproximação para $\log_{10}(3)$ e $1{,}041$ como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja $30\ °C$ é mais próximo de

a) 22. b) 50. c) 100. d) 200. e) 400.

15) (ENEM 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substitui a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}\left(M_0\right)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (e, dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
e) $10^{27,00}$

16) (ENEM 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27 b) 36 c) 50 d) 54 e) 100

LINKS PARA AS VÍDEO AULAS
https://bityli.com/43dcU

EXERCÍCIOS PROPOSTOS		
01) B	02) B	03) A
04) A	05) A	06) C
07) C	08) D	09) D
10) B	11) C	12) A
13) D	14) C	15) B
16) E	17) C	18) D
19) D	20) B	21) D
22) A	23) D	24) D
25) A	26) B	

EXERCÍCIOS ENEM		
01) D	02) B	03) E
04) C	05) C	06) C
07) C	08) D	09) B
10) D	11) C	12) D
13) C	14) D	15) E
16) E