

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. Equações exponenciais

- As equações exponenciais são equações em que a incógnita está no expoente. Para resolvermos uma equação exponencial devemos inicialmente isolar a potência em um dos lados da equação e transformar o outro lado em uma potência com a base igual.

$$a^n = a^p \Rightarrow n = p$$

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Resolva as seguintes equações exponenciais.

- a) $2^{x+1} = 64$ d) $7^{x-8} - 1 = 342$
 b) $3^{2x-5} = 27$ e) $2 \cdot 3^{x+1} + 15 = 501$
 c) $4 \cdot 5^{x-1} = 100$ f) $3 \cdot 4^x - 20 = 364$

02) Os coelhos são conhecidos por se reproduzirem rápida e eficientemente na natureza, visto que são presas naturais, os coelhos se reproduzem de forma exponencial para manter a espécie viva. O coelho-europeu foi introduzido na Austrália, no século XIX e, por não terem predador natural naquele país, a multiplicação dos coelhos atingiu níveis muito elevados e se transformou num problema prejudicando bastante a agricultura.

Em certa região da Austrália, a população de coelhos era dada pela função $P = 1000 \cdot 2^{0,4t}$, em que t é o tempo medido em anos, com $t = 0$ representando o ano 1840. A população de coelhos nessa região atingirá 64.000 indivíduos no ano

- a) 1855.
 b) 1860.
 c) 1865.
 d) 1870.
 e) 1875.
- 03) Uma fábrica de produtos de beleza foi inaugurada e tem planos de se expandir nos próximos anos, com isso será preciso que novos funcionários sejam contratados todos os anos. A função $N(t) = 4 \cdot 5^{0,2t+1} + 100$ relaciona o número de funcionários que essa fábrica possui t anos após a sua inauguração, que ocorreu em 2018.

Essa fábrica terá 600 funcionários no ano

- a) 2020.
 b) 2022.
 c) 2024.
 d) 2026.
 e) 2028.

04) Em uma região litorânea estão sendo construídos edifícios residenciais. Um biólogo prevê que a quantidade de pássaros de certa espécie irá diminuir segundo a lei

$$n(t) = n(0) \cdot 4^{-\frac{t}{3}}, \text{ em que } n(0) \text{ é a quantidade estimada de pássaros antes do início das construções e } n(t) \text{ é a quantidade existente } t \text{ anos depois.}$$

Qual é o tempo necessário, desde o início das construções, para que a população de pássaros dessa espécie se reduza à 1/8 da população existente no início das construções?

- a) 3 anos
 b) 3,5 anos
 c) 4 anos
 d) 4,5 anos
 e) 5 anos

05) Uma eleição presidencial de certo país ficou marcada pela divulgação de uma grande quantidade de *fake news* (notícias falsas) pela internet. Uma pessoa, como forma de denegrir a imagem de certo candidato à presidência, enviou uma notícia falsa por um aplicativo de rede social e essa notícia *viralizou* sendo compartilhada diversas vezes alcançando um número N de pessoas que é dado pela função $N = 50 \cdot 2^t$, em que t é o tempo, em minutos, desde a divulgação da notícia.

A quantidade de pessoas que receberam essa mensagem alcançará 300.000

- a) entre 9 e 10 minutos após a divulgação da notícia.
 b) entre 10 e 11 minutos após a divulgação da notícia.
 c) entre 11 e 12 minutos após a divulgação da notícia.
 d) entre 12 e 13 minutos após a divulgação da notícia.
 e) entre 13 e 14 minutos após a divulgação da notícia.

2. Função exponencial

- As funções exponenciais aparecem nas mais diversas situações. Normalmente ocorrem quando determinada grandeza é sucessivamente multiplicada por um mesmo número. A seguir veremos alguns exemplos.

EXERCÍCIOS DE AULA

06) Uma pessoa publicou uma notícia falsa em uma rede social que alcançou inicialmente 200 pessoas. Devido a vários compartilhamentos da informação, a quantidade de pessoas alcançadas pela notícia aumenta cinco vezes a cada hora desde a publicação inicial. Qual será a função que relaciona a quantidade N de pessoas alcançadas pela notícia, t horas após a publicação inicial?

- a) $N(t) = 200 + 5^t$
 b) $N(t) = 200 + t^5$
 c) $N(t) = 200 \cdot 5^t$
 d) $N(t) = 200 \cdot 5^t$
 e) $N(t) = 1000 \cdot t$



07) O Japão é um dos países com os graves problemas demográficos. A baixa fecundidade que já dura décadas leva à redução da população em idade de trabalho, deprecia a demanda por investimentos e leva a uma estagnação econômica.

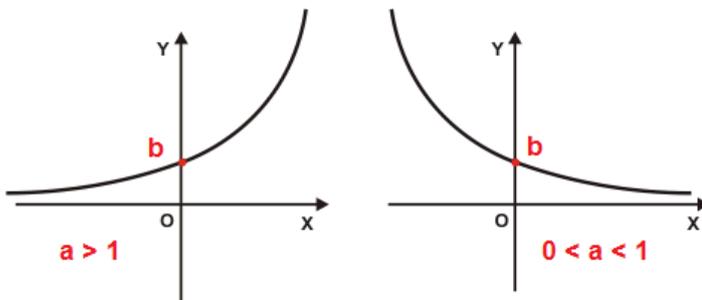
<https://jornalggn.com.br/europa/os-riscos-do-crescimento-demografica-negativo-na-europa/> (adaptado)

Suponha que a população P do Japão, hoje com 127 milhões de habitantes, decresça anualmente a uma taxa de 1% ao ano. Qual será essa população P , em milhões de habitantes, daqui a t anos?

- a) $P(t) = 127 - 0,01t$
- b) $P(t) = 127 - 0,99t$
- c) $P(t) = 127 \cdot 0,99^t$
- d) $P(t) = 127 \cdot 0,01^t$
- e) $P(t) = 127^{0,99t}$

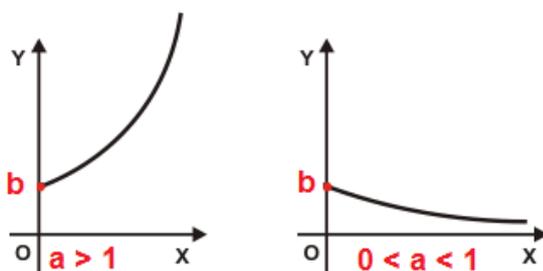
➤ Observe que todas as funções dos exemplos anteriores possuem a forma $y = b \cdot a^x$ ou $f(x) = b \cdot a^x$ e pode ser interpretada como uma grandeza que possui valor inicial igual a "b" (quando $x = 0$) e é multiplicada sucessivamente pelo número "a".

➤ Uma função exponencial com essa forma possui seus gráficos dados por:



➤ Note que o valor da base a é quem determina se a função é crescente ou decrescente. É importante ainda perceber que funções desse tipo nunca serão iguais a zero e, dessa forma, os gráficos jamais encostarão no eixo x .

➤ Em problemas contextualizados, o mais comum é que não exista a parte negativa do gráfico ($x < 0$) e os gráficos ficarão com as seguintes formas:



➤ Os exemplos de aplicações de funções exponenciais, na maioria dos casos, relacionam uma certa grandeza ao tempo (t) e também, na maioria dos casos, a passagem desse tempo é unitária (a cada ano, a cada dia, a cada hora, etc.). Entretanto, em determinadas situações, a passagem do tempo não é unitária e necessitaremos fazer uma pequena alteração na função para adequá-la. Vejamos a seguir um exemplo.

EXERCÍCIO DE AULA

08) Chamamos de tempo de meia-vida de uma substância radioativa ao tempo que se passa para que a quantidade da substância se reduza à metade. O tempo de meia-vida do Césio-137 (Cs-137) é de aproximadamente 30 anos, ou seja, a cada 30 anos a quantidade de Césio-137 que temos em uma amostra da substância se reduzirá à metade já que a outra metade irá se transformar em outra substância, não radioativa, que no caso será o Bário-137 (Ba-137). Uma certa amostra de Césio-137 possui inicialmente 20 gramas. Qual a função que relaciona a quantidade Q , em gramas, restante de Césio-137, após t anos?

- a) $Q(t) = 20 \cdot 2^{-t}$
- b) $Q(t) = 20 \cdot 2^{-t/30}$
- c) $Q(t) = 20 \cdot 2^{-30t}$
- d) $Q(t) = 20 \cdot 2^{t/30}$
- e) $Q(t) = 20 \cdot 2^{30t}$

➤ Nesse último exemplo, a passagem do tempo não é unitária e sim a cada 30 anos. Dessa forma, devemos dividir o tempo t , em partes com tamanho igual à passagem do tempo.

OBSERVAÇÃO

Em funções do tipo $y = b \cdot a^{kt}$, em que a , b e k são constantes reais e $0 < a \neq 1$ é importante saber que para períodos de tempo iguais, a grandeza y é sempre multiplicada pelo mesmo número. Por exemplo, se determinada grandeza dobra seu valor em três dias, segundo uma função da forma $y = b \cdot a^{kt}$, então, passados mais três, a grandeza dobrará de valor novamente.

EXERCÍCIO DE AULA

09) (UEPB 2014) Biólogos e Matemáticos acompanharam em laboratório o crescimento de uma cultura de bactérias e concluíram que esta população cresce com o tempo $t \geq 0$, ao dia, conforme a lei $P(t) = P_0 5^{\lambda t}$, onde P_0 , é a população inicial da cultura ($t = 0$) e λ é uma constante real positiva. Se, após dois dias, o número inicial de bactérias duplica, então, após seis dias, esse número é:

- a) $10P_0$ b) $6P_0$ c) $3P_0$ d) $8P_0$ e) $4P_0$



10) (ULBRA 2016) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N(t) = C \cdot A^t$, com o tempo t dado em dias e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

- a) 40 b) 30 c) 25 d) 20 e) 10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) (PUC-RJ 2018) Cientistas brasileiros verificaram que uma determinada colônia de bactérias triplica a cada meia hora. Uma amostra de 10.000 bactérias por mililitro foi colocada em um tubo de ensaio e, após um tempo x , verificou-se que o total era de $2,43 \cdot 10^6$ bactérias por mililitro.

Qual é o valor de x ?

- a) 2 horas
 b) 2 horas e 30 minutos
 c) 3 horas e trinta minutos
 d) 48 horas
 e) 264 horas

02) (IFPE 2017) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x . Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

- a) 13 refrigeradores. b) 39 refrigeradores.
 c) 69 refrigeradores. d) 112 refrigeradores.
 e) 127 refrigeradores.

03) Uma pessoa comprou um pacote de divulgação de um anúncio em uma rede social para que os usuários dessa rede conheçam a sua loja de artigos esportivos recém-inaugurada. Espera-se que, durante a duração desse pacote, o número de pessoas que verão o anúncio será dado por $N(t) = 20 \cdot 3^{t-1}$, com t dado em dias desde a compra do pacote de divulgação.

O número de pessoas que viram o anúncio será igual a 4860 em

- a) 7 dias. b) 6 dias. c) 5 dias. d) 4 dias. e) 3 dias.

04) Um vazamento em um navio petroleiro provocou um desastre ambiental de enormes proporções fazendo com que uma grande área do Oceano Pacífico ficasse coberta de óleo. Atualmente a mancha possui uma área de 5000 m^2 e, segundo um especialista, irá triplicar seu tamanho a cada dia. Qual a função que determina a área A da mancha de óleo, t dias depois?

- a) $A = 5000 + 3t$ b) $A = 5000^{3t}$ c) $A = 5000 + 3^t$
 d) $A = 1500t$ e) $A = 5000 \cdot 3^t$

05) Para estudar o crescimento de uma colônia de bactérias, um pesquisador colocou em uma cultura 2000 bactérias e percebeu, com o passar do experimento, que a quantidade de bactérias triplicava a cada 5 horas. Qual será a função que determina a quantidade B de bactérias nessa cultura, t horas após o início do experimento?

- a) $B = 2000 \cdot 3^t$ b) $B = 2000 \cdot 5^t$ c) $B = 2000 \cdot 5^{\frac{t}{3}}$
 d) $B = 2000 \cdot 3^{\frac{t}{5}}$ e) $B = 2000 \cdot 3^{5t}$

06) Um banco oferece uma aplicação de longo prazo em que devem ser depositados no mínimo R\$ 20.000,00 e seu rendimento, um pouco maior que a poupança, será de 23% a cada 3 anos. Qual a função que relaciona o montante M acumulado após t anos se uma pessoa investiu nessa aplicação a quantia mínima?

- a) $M = 20000 + 0,23t$ b) $M = 20000 + 0,23 \cdot \frac{t}{3}$
 c) $M = 20000 \cdot (1,23)^t$ d) $M = 20000 \cdot (1,23)^{3t}$
 e) $M = 20000 \cdot (1,23)^{\frac{t}{3}}$

07) (UPE 2015) Os biólogos observaram que, em condições ideais, o número de bactérias $Q(t)$ em uma cultura cresce exponencialmente com o tempo t , de acordo com a lei $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$, sendo $k > 0$ uma constante que depende da natureza das bactérias; o número irracional e vale aproximadamente 2,718 e Q_0 é a quantidade inicial de bactérias.

Se uma cultura tem inicialmente 6.000 bactérias e, 20 minutos depois, aumentou para 12.000, quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora?

- a) $1,8 \times 10^4$
 b) $2,4 \times 10^4$
 c) $3,0 \times 10^4$
 d) $3,6 \times 10^4$
 e) $4,8 \times 10^4$



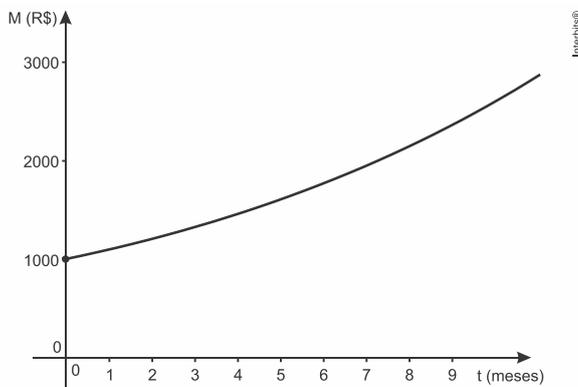
08) (UFPR 2016) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \cdot 2^{0,0625t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

- a) 8.
- b) 12.
- c) 16.
- d) 24.
- e) 32.

09) (UFPA 2016) Uma substância ingerida pelo organismo é excluída pelo sistema excretor segundo uma função exponencial. O tempo de meia vida é o tempo que uma quantidade ingerida leva para decair à metade, que, para a substância em questão, é de 12 horas. A quantidade da substância, em miligramas, a ser ingerida de modo que, ao final de 36 horas, a quantidade restante seja de 10 mg é de

- a) 30.
- b) 60.
- c) 80.
- d) 90.
- e) 100.

10) (IFSUL 2017) Uma aplicação bancária é representada graficamente conforme figura a seguir.



M é o montante obtido através da função exponencial $M = C \cdot (1,1)^t$, C é o capital inicial e t é o tempo da aplicação.

Ao final de 04 meses o montante obtido será de

- a) R\$ 121,00
- b) R\$ 146,41
- c) R\$ 1.210,00
- d) R\$ 1.464,10
- e) R\$ 2.152,35

11) Uma epidemia de virose atingiu uma pequena comunidade, no norte do país, com apenas 2000 habitantes. Um estudo modelou a quantidade P de infectados dessa população, por meio da função $P(t) = \frac{500}{1 + 8 \cdot 2^{-t+1}}$, em

que t representa o tempo, medido em meses, decorrido após a identificação do primeiro infectado.

As autoridades devem colocar em prática um plano de ação que visa extinguir a presença do vírus antes que ele atinja 400 habitantes.

Considerando o modelo descrito, o tempo máximo disponível, em meses, para que o plano seja executado é

- a) 3.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 6.
- e) 7.

12) (UFPR 2014) Uma pizza a 185°C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65°C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t , em minutos, pela expressão $T = 160 \cdot 2^{-0,8t} + 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa pizza com as mãos nuas, sem se queimar?

- a) 0,25 minutos.
- b) 0,68 minutos.
- c) 2,5 minutos.
- d) 6,63 minutos.
- e) 10,0 minutos.

EXERCÍCIOS ENEM

01) (ENEM PPL 2019) Uma equipe de cientistas decidiu iniciar uma cultura com exemplares de uma bactéria, em uma lâmina, a fim de determinar o comportamento dessa população. Após alguns dias, os cientistas verificaram os seguintes fatos:

- a cultura cresceu e ocupou uma área com o formato de um círculo;
- o raio do círculo formado pela cultura de bactérias aumentou 10% a cada dia;
- a concentração na cultura era de 1.000 bactérias por milímetro quadrado e não mudou significativamente com o tempo.

Considere que r representa o raio do círculo no primeiro dia, Q a quantidade de bactérias nessa cultura no decorrer do tempo e d o número de dias transcorridos.

Qual é a expressão que representa Q em função de r e d ?

- a) $Q = (10^3(1,1)^{d-1}r)^2 \pi$
- b) $Q = 10^3((1,1)^{d-1}r)^2 \pi$
- c) $Q = 10^3(1,1(d-1)r)^2 \pi$
- d) $Q = 2 \times 10^3(1,1)^{d-1}r\pi$
- e) $Q = 2 \times 10^3(1,1(d-1)r)\pi$



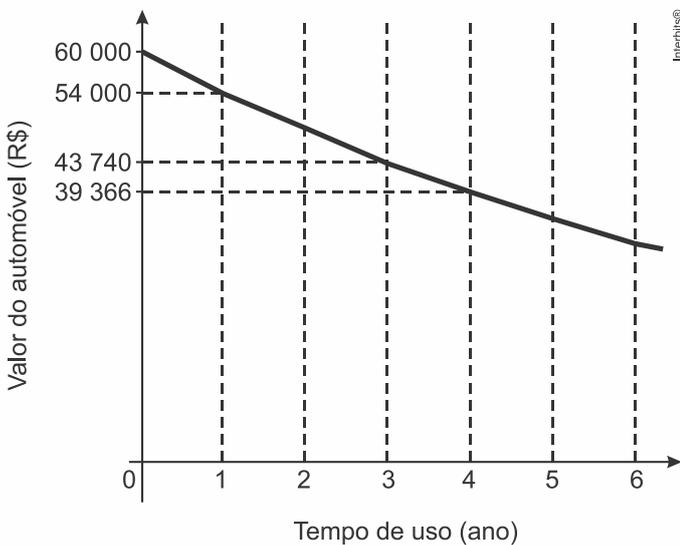
02) (ENEM PPL 2019) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$, em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva.

Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

- a) $3N_0$.
- b) $15N_0$.
- c) $243N_0$.
- d) $360N_0$.
- e) $729N_0$.

03) (ENEM (Libras) 2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.

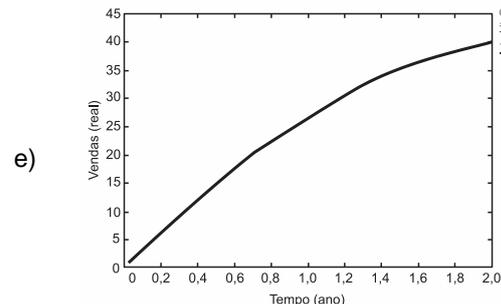
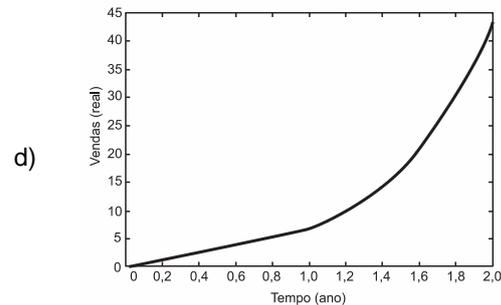
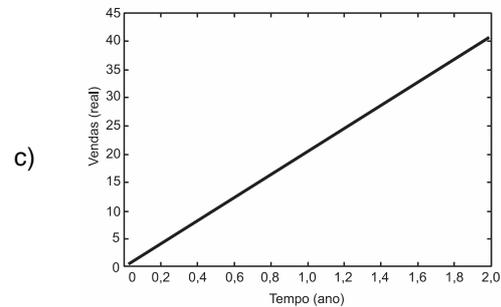
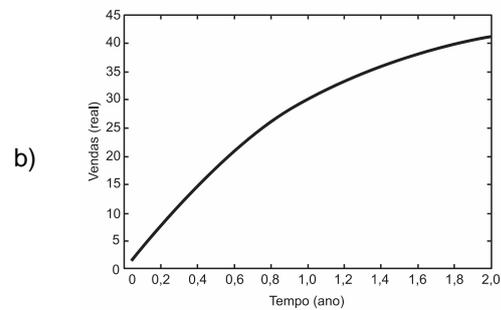
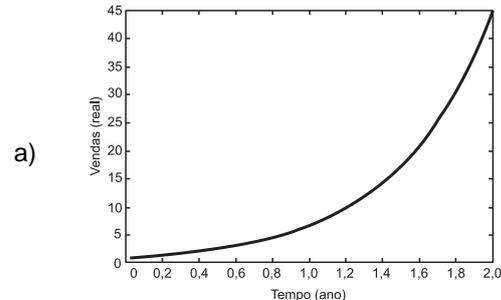


Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

- a) 48.000,00
- b) 48.114,00
- c) 48.600,00
- d) 48.870,00
- e) 49.683,00

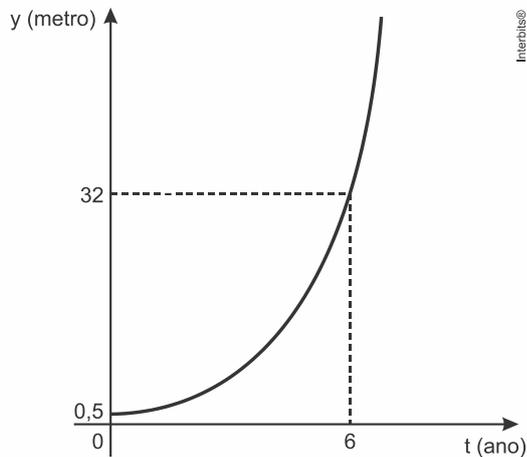
04) (ENEM PPL 2017) Ao abrir um negócio, um microempresário descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, o que fez suas vendas crescerem de modo exponencial.

Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?





05) (ENEM 2016 2ª aplicação) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y .



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

- a) 3.
- b) 4.
- c) 6.
- d) $\log_2 7$.
- e) $\log_2 15$.

06) (ENEM 2016 2ª aplicação) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

- a) reduzida a um terço.
- b) reduzida à metade.
- c) reduzida a dois terços.
- d) duplicada.
- e) triplicada.

07) (ENEM 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- a) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8.000$
- b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8.000$
- c) $P(t) = 4.000 \cdot t^{-1} + 8.000$
- d) $P(t) = 8.000 \cdot (0,5)^{t-1}$
- e) $P(t) = 8.000 \cdot (1,5)^{t-1}$

08) (ENEM PPL 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

- a) 7.416,00.
- b) 3.819,24.
- c) 3.709,62.
- d) 3.708,00.
- e) 1.909,62.

09) (ENEM PPL 2013) Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

- a) afim.
- b) seno.
- c) cosseno.
- d) logarítmica crescente.
- e) exponencial.

LINKS PARA AS VÍDEO AULAS

<https://bitly.com/9Yeuo>

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) B	02) E	03) B
04) E	05) D	06) E
07) E	08) C	09) C
10) D	11) D	12) C

EXERCÍCIOS ENEM

01) B	02) C	03) C
04) D	05) B	06) D
07) E	08) E	09) E

Nunca
desista
☞

