MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
COLÉGIO DE APLICAÇÃO
Av. Marechal Rondon S/N, Rosa Elze. CEP: 49100-000
(79) 3194-6930/6931 – direcao.codap@gmail.com

DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSOR: Msc. CARLOS ALBERTO BARRETO
SÉRIE E TURMA: 2º ANO B DO ENSINO MÉDIO

ORIENTAÇÕES DE ESTUDO

Período: de 26 de maio à 05 de junho

Conteúdo: Análise Combinatória

Datas para auxiliar os seus estudos:

- ✓ Atendimentos ocorrem todas as quintas-feiras e será das 14 às 15h;

- ✓ No período de 26 de maio a 01 de junho reserve dois momentos:
  - Um momento para ler as páginas 2 e 3 e resolver os Exercícios Propostos das páginas 3, 4 e 5;
  - E um outro momento para ler as páginas 5, 6 e 7 e resolver os Exercícios Propostos das páginas 7 e 8.

- ✓ No dia 02 de junho (terça-feira), das 10h às 11h, participe do encontro on-line pelo Microsoft Teams. Nele iremos revisar, aprofundar e fazer alguns exercícios relacionados a Análise Combinatória.

  Para acessar o Microsoft Teams você deve:
  - acessar (office.com);
  - entrar com a sua senha;
  - clicar no ícone Teams;
  - clicar em Equipes e localizar a nossa equipe onde ocorrerá o encontro
  - Nome da nossa equipe: **Turma do 2º ano B com o professor Carlos Alberto – Matemática;**
  - Daí é só ingressar na reunião (encontro).

- ✓ No período de 03 a 05 de junho teremos aberto no SIGAA um Fórum com questões de Análise Combinatória. Você deverá responder essas questões e postar suas respostar neste mesmo Fórum.

Bons estudos e cuide-se bem!!!

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é um campo de estudo da Matemática que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto finito.

1 – Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

A análise combinatória é alicerçada no princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo da contagem. Ele baseia-se no seguinte:

Se um experimento E_1 pode apresentar n_1 resultados distintos e, para cada um desses resultados, um experimento E_2 pode apresentar n_2 resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de E_1 e E_2, nessa ordem, é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2$.

Exemplo 1: No cardápio da lanchonete LANCHE BOM há 6 opções de escolha de sanduiches e 5 opções de escolha de sucos. De quantas maneiras distintas o cliente pode escolher um sanduiche e um suco nessa lanchonete?

Resolução

- ✓ Experimento E_1 (escolher um sanduiche): 6 possibilidades;
- ✓ Experimento E_2 (escolher um suco): 5 possibilidades.

Pelo PFC, temos que são $\mathbf{6 \cdot 5 = 30}$ maneiras distintas do cliente escolher um sanduiche e um suco na lanchonete LANCHE BOM.

O princípio fundamental da contagem também é válido para mais de dois experimentos:

Se os experimentos $E_1, E_2, E_3 \dots, E_p$ podem apresentar $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de $E_1, E_2, E_3 \dots e\ E_p$, nessa ordem, é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_p$.

Exemplo 2: A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Transporte
Rodoviário
Aéreo em 1ª classe
Aéreo em 2ª classe

Hospedagem
Albergue
Pousada
Hotel 3 estrelas
Hotel 4 estrelas
Hotel 5 estrelas

Tempo de permanência
4 dias
5 dias
7 dias
10 dias

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico com transporte, hospedagem e tempo de permanência?

Resolução

- ✓ Experimento E_1 (escolher o transporte): 3 possibilidades;
- ✓ Experimento E_2 (escolher a hospedagem): 5 possibilidades;
- ✓ Experimento E_3 (escolher o tempo de permanência): 4 possibilidades.

Pelo PFC, temos que são $\mathbf{3 \cdot 5 \cdot 4 = 60}$ maneiras distintas de compor esse pacote turístico.

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico com transporte, hospedagem e tempo de permanência?

Resolução

- ✓ Experimento E_1 (escolher o transporte): 2 possibilidades;
- ✓ Experimento E_2 (escolher a hospedagem): 3 possibilidades;
- ✓ Experimento E_3 (escolher o tempo de permanência): 4 possibilidades.

Pelo PFC, temos que são $\mathbf{2 \cdot 3 \cdot 4 = 24}$ maneiras distintas de compor esse pacote turístico.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T & C Amazônia, ano 1, n.º 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos - uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores.

O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

a) 1.320. b) 2.090. c) 5.845. d) 6.600. e) 7.245.

2. Qualquer símbolo utilizado na escrita de uma linguagem é chamado de caractere; por exemplo: letras, algarismos, sinais de pontuação, sinais de acentuação, sinais especiais etc. Em computação, cada caractere é representado por uma sequência de 8 bits, e cada bit pode assumir dois estados, representados por 0 e 1; por exemplo, a sequência 01000111 representa a letra G. Assim, o número máximo de caracteres que podem ser representados por todas as sequências de 8 bits é:

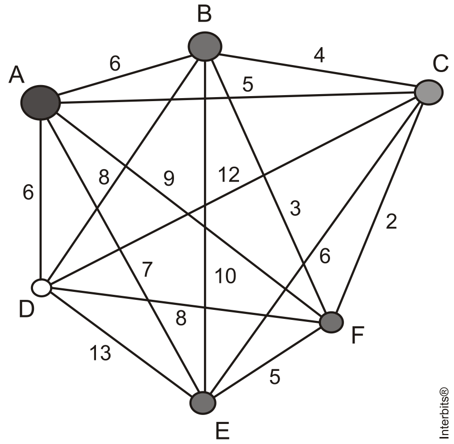
a) 16 b) 32 c) 64 d) 128 e) 256

3. O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

4. João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.
Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de
a) 60 min. b) 90 min. c) 120 min. d) 180 min. e) 360 min.

5. Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma sequência formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro o triplo do segundo. Uma pessoa que desconhece essa sequência pretende abrir o cofre. O maior número possível de sequências que ele deve digitar é:
a) 170 b) 240 c) 180 d) 280 e) 168

2 – Fatorial

Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o fatorial de n, representado por n!, como o produto de todos os números naturais de n até 1. Isto é:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
  Como já sabemos que 5! = 120, podemos resolver 6! assim:
  $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$
- $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$
  Como já sabemos que 6! = 720, podemos resolver 9! assim:
  $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6! = 504 \cdot 720 = 362\,880$
- $\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
- $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

Também definimos que:
- 1! = 1
- 0! = 1

3 – Classificação dos agrupamentos

Qualquer reunião de elementos que formam um todo é um **agrupamento**.

Exemplos:

- Os alunos do 2º ano B (ano letivo de 2020) constituem um agrupamento de pessoas;
- A palavra AMOR é um agrupamento de letras;
- O número natural 3729 é um agrupamento de algarismos;
- Escolher 6 números naturais dentre as opções de 1 a 60 para concorrer na Mega Sena, gera um agrupamento de 6 números;

A análise combinatória identifica dois tipos de agrupamentos: os arranjos e as combinações, apresentados a seguir:

3.1 – Arranjos

Arranjos são agrupamentos em que **se considera a ordem** dos elementos. Qualquer mudança na ordem de elementos distintos altera o agrupamento.

Exemplos:

- A palavra AMOR é um agrupamento de letras que é considerado um arranjo. Veja que se você mudar a ordem das letras forma um outro anagrama, como ROMA, MORA ou MOAR, por exemplo.

Pesquise o significado de Anagrama.

- O número natural 3729 que é um agrupamento de algarismos também é considerado um arranjo. Se você escrever 9273 terá escrito um outro número utilizando os mesmos algarismos.

3.2 – Combinações

Combinações são agrupamentos em que **não se considera a ordem dos elementos**. Mudanças na ordem dos elementos não alteram o agrupamento.

Exemplos:

- Os alunos do 2º ano B (ano letivo de 2020) constituem um agrupamento de pessoas que é considerado uma combinação. Veja que se eu pedir para você escrever uma lista com o nome completo de todos os alunos da turma, você poderá escolher a ordem que desejar, pois ela não está sendo exigida. Basta se preocupar em escrever o nome completo de todos os alunos. Caso fosse pedido para escrever uma lista com o nome completo de todos os alunos da turma, em ordem alfabética, esse agrupamento passaria a ser considerado um arranjo;

- Escolher 6 números naturais dentre as opções de 1 a 60 para concorrer na Mega Sena, gera um agrupamento de 6 números que é também considerado uma combinação. Suponha que você preencha um bilhete da Mega Sena com os seguintes números: 10, 20, 30, 40, 50 e 60, nessa ordem. Se no momento do sorteio saírem os números 30, 50, 40, 10, 60 e 20, nessa ordem, você será vencedor, pois todos os números sorteados foram jogados por você e a ordem não é considerada.

Observações:

I. Qualquer agrupamento, arranjo ou combinação, pode ser classificado como:
- **Agrupamento simples**, quando não é permitida a repetição de nenhum elemento;
- **Agrupamento completo,** quando são permitidas repetições de elementos.

II. Os agrupamentos que são considerados arranjos podem ser resolvidos de forma direta pelo princípio fundamental da contagem.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Um hacker sabe que a senha de acesso a um arquivo secreto é um número natural de cinco algarismos distintos e não nulos. Com o objetivo de acessar esse arquivo, o hacker programou o computador para testar, como senha, todos os números naturais nessas condições. O computador vai testar esses números um a um, demorando 5 segundos em cada tentativa. O tempo máximo para que o arquivo seja aberto é:

A) 12 h 30 min
B) 11 h 15 min 36 s
C) 21 h
D) 12 h 26 min
E) 7 h

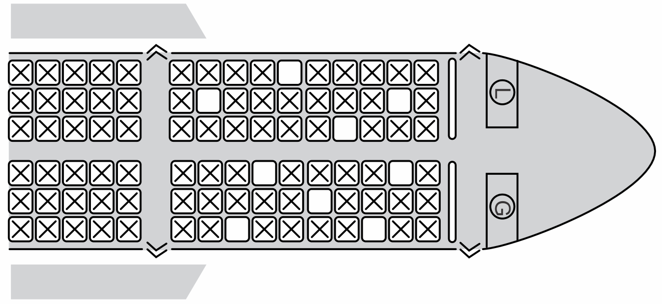
7. Um fiscal do ministério do trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visitas mensal a essas empresas?

a) 180 b) 120 c) 100 d) 48 e) 24

8. Ao criar um software, o programador resolveu atribuir-lhe, como chave de instalação, uma sequência de doze caracteres distintos. Sabendo que os caracteres utilizados serão 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, C, D, F, G e H, de modo que não apareçam juntos dois algarismos nem duas letras, o número possível de chaves de instalação é:

a) $12!$ b) $(12!)^2$ c) $2 \cdot 12!$ d) $(6!)^2$ e) $2 \cdot (6!)^2$

9. Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

10. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

a) 24 b) 31 c) 32 d) 88 e) 89

11. Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) Uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) Um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) Duas combinações.
e) Dois arranjos.