P.A. e P.G. - Retomada

Prof. Msc. Wagner Santiago de Souza

Progressão Aritmética (P.A.)

- São sequências numéricas em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante r (Razão da P.A.). Ou seja, em todas as progressões aritméticas, temos:

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}, \text{ com } n \in N \text{ e } n \geq 2.$$

- Exemplo: A sequência (2, 5, 8, 11, 14, 17) é uma P.A. de razão r = 3, pois $5 = 2 + 3, 8 = 5 + 3, 11 = 8 + 3, 14 = 11 + 3\ e\ 17 = 14 + 3$.

Razão da P.A.

- Em qualquer P.A. de razão r, temos:

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r \leftrightarrow r = a_n - a_{n-1}.}$$

Ou seja,

$$\mathbf{r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}.}$$

Classificação

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior ($r > 0$).

  Ex.: (5, 9, 13, 17,...) é uma P.A. crescente de razão $r = 4$.

- Constante: Quando todos os termos são iguais entre si ($r = 0$).

  Ex.: (8, 8, 8, 8, 8) é uma P.A. constante de razão $r = 0$.

- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior ($r < 0$).

  (8, 3, - 2, - 7,...) é uma P.A. decrescente de razão $r = - 5$.

Notações especiais

- P.A. de três termos:

$$(x - r, x, x + r) \text{ ou } (x, x + r, x + 2r).$$

- P.A. de quatro termos:

$$(x, x + r, x + 2r, x + 3r).$$

- P.A. de cinco termos:

$$(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r) \text{ ou } (x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r).$$

Exemplo

- Em uma P.A. de três termos, o primeiro termo é 5 e a soma dos três termos é 36. Determine a P.A.

Solução: Podemos representar a P.A. por (5, 5 + r, 5 + 2r). Como a soma dos três termos é 36, temos:

$$5+5+r+5+2r=36$$
$$15+3r=36$$
$$3r=36-15$$
$$3r=21$$
$$r=7.$$

Logo, a P.A. procurada é (5,12,19).

Propriedade

- Dada uma P.A. qualquer (a_1, a_2,...,a_{n-1}, a_n, a_{n+1},...), temos:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ou seja, em toda P.A., cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}, a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}, \ldots$$

Exemplo

- Sabendo que a sequência (x, x + 3, 2x + 1,...) é uma P.A., determine sua razão.

Solução:

$$x + 3 = \frac{x + 2x + 1}{2}$$
$$x + 2x + 1 = 2(x + 3)$$
$$3x + 1 = 2x + 6$$
$$3x - 2x = 6 - 1$$
$$x = 5.$$

Desse modo, a P.A. é (5, 5+3, 2·5 + 1) = (5, 8, 11). Assim, r = 3.

Fórmula do termo geral da P.A.

- Dada uma P.A. de razão r e ordem n, o termo a_n é dado pela seguinte expressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

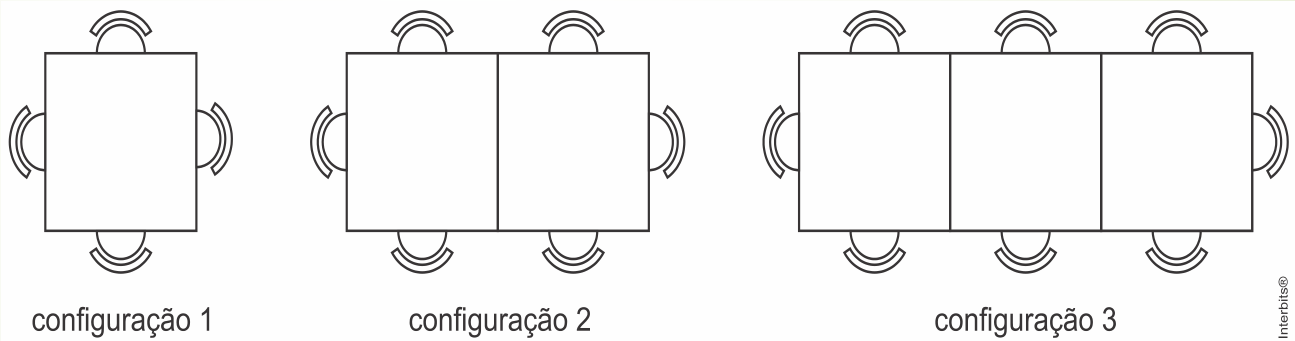
Exemplos:

1) $a_9 = a_1 + (9 - 1) \cdot r \leftrightarrow a_9 = a_1 + 8r;$

2) $a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot r \leftrightarrow a_6 = a_1 + 5r.$

Questão 1 (termo geral)

- Observe, na figura abaixo, a quantidade de mesas e o número máximo de lugares disponíveis em cada configuração:



Considere que a sequência de configurações continue, segundo o padrão apresentado. Então, qual o número máximo de lugares disponíveis em uma configuração com 75 mesas?

Solução:

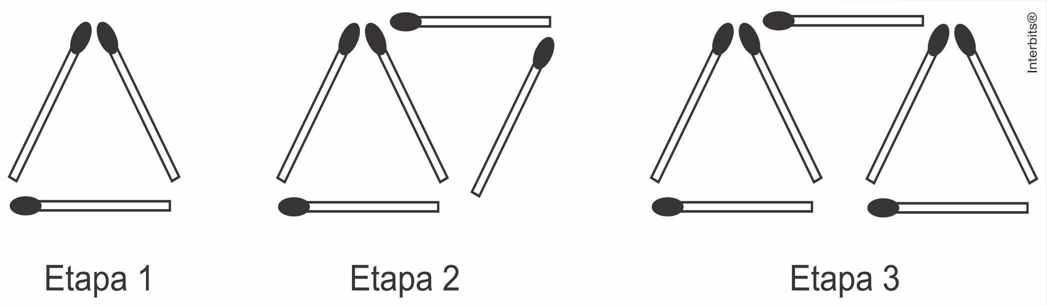
- Observe que os números de cadeiras nas configurações formam a P.A. (4, 6, 8, 10,...), com $a_1 = 4 \, e \, r = 2$. Assim:

$$a_{75} = a_1 + (75 - 1) \cdot 2$$
$$a_{75} = 4 + 74 \cdot 2$$
$$a_{75} = 4 + 148$$
$$a_{75} = 152.$$

Logo, o número máximo de cadeiras em uma configuração com 75 mesas é 152.

Questão 2 (termo geral)

- (Ufrgs 2020) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo.



Na etapa n serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

a) 120 b) 121 c)122 d)123 e)124

Solução:

- Como podemos observar, os números de palitos nas etapas formam a P.A. (3, 5, 7,...) com $a_1 = 3$ e $r = 2$. De acordo com o enunciado devemos encontrar o valor de n, sabendo que $a_n = 245$. Assim:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$245 = 3 + (n-1) \cdot 2$$
$$245 - 3 = 2n - 2$$
$$242 + 2 = 2n$$
$$2n = 244$$
$$n = 122.$$

Logo, a alternativa correta é a letra c).

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

- **Ilustração:** Qual a soma de todos os números inteiros de 1 até 100?

Solução: temos que somar todos os números da P.A. (1, 2, 3, 4, ...,97, 98, 99, 100). Observem que:

$$1 + 100 = 101$$
$$2 + 99 = 101$$
$$3 + 98 = 101$$
$$4 + 97 = 101$$
$$\vdots$$

Assim, temos 50 pares de números cuja a soma de cada um deles é igual a 101. Logo, o valor procurado é $101 \cdot 50 = 5050$.

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

- Para somar os n primeiros termos de uma P.A., podemos utilizar a fórmula a seguir:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Onde

- a_1 é o primeiro termo somado;
- a_n é o último termo somado;
- n é o número de termos somados.

Exemplo

- Qual a soma de todos os números pares positivos menores ou iguais a 20?

Solução: Para resolver a soma pedida, basta somar os dez termos da P.A. (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20). Utilizando a fórmula da soma, temos:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(2 + 20) \cdot 10}{2}$$

$$S_{10} = 22 \cdot 5$$

$$S_{10} = 110$$

Logo, a soma desejada é 110.

Questão 1 (Soma dos termos)

- (G1 - ifpe 2019) No país Diasmelhores, um candidato à Presidência da República foi convidado pela rádio SOMALTO para, durante 20 semanas antes das eleições, divulgar, semanalmente, suas propostas de governo. Ficou estabelecido pela rádio que, na primeira semana, o candidato teria 120 minutos disponíveis para fazer sua propaganda eleitoral e que, a cada semana seguinte, teria 5 minutos a menos que na semana anterior. No final das 20 semanas, o candidato terá utilizado um total de

a) 2900 minutos b) 1450 minutos c) 3350 minutos

d) 6700 minutos e) 2400 minutos

Solução:

- Para determinar a quantidade total de minutos utilizado pelo candidato, devemos somar o tempo utilizado em todas as 20 semanas que é equivalente a somar os 20 primeiros termos da P.A. (120, 115, 110, 105, ...). Desse modo, temos:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Como não sabemos o valor de a_{20}, precisamos encontrá-lo antes de resolver a soma. Faremos isso com o auxílio da fórmula do termo geral.

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot r$$
$$a_{20} = 120 + 19 \cdot (-5)$$
$$a_{20} = 120 - 95$$
$$a_{20} = 25.$$

Encontrado o valor de a_{20}, voltaremos a fórmula da soma para concluir a resolução.

$$S_{20} = \frac{(120 + 25) \cdot 20}{2}$$
$$S_{20} = 145 \cdot 10$$
$$S_{20} = 1450.$$

Logo, a alternativa correta é a letra b).

Progressão Geométrica (P.G.)

- São sequências numéricas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com uma constante q (Razão da P.G.). Ou seja, em todas as progressões geométricas, temos:

$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} \cdot q}, \text{ com n} \in N \text{ e n} \geq 2.$$

- Exemplo: A sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64) é uma P.G. de razão q = 2, pois $4 = 2 \cdot 2, 8 = 4 \cdot 2, 16 = 8 \cdot 2, 32 = 16 \cdot 2\ e\ 64 = 32 \cdot 2$.

Razão da P.G.

- Em qualquer P.G. de razão q, temos:

$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} \cdot q \leftrightarrow q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Exemplo

- (PUC-RJ) A sequência (2,x,y,8) representa uma progressão geométrica. O produto xy vale

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16.

Solução: Observem que $q = \frac{x}{2}$ e $q = \frac{8}{y}$, logo;

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{y} \rightarrow xy = 16.$$

Classificação

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior.
- Constante: Quando todos os termos são iguais entre si.
- Estacionária: Quando todos os termos, a partir do segundo, são nulos.
- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior.
- Alternante: Quando cada termo tem sinal contrário ao do anterior ($q < 0$).

Exemplos (Classificação)

- Crescente: (2,6,18,54,...), (- 60; - 30; - 15; -7,5;...).
- Constante: (5,5,5,5,5,5,5,5,5,5)
- Estacionária: (6,0,0,0,0,0,0,0,0,...)
- Decrescente: (81,27,9,3,1), (- 5, - 10, - 20, - 40,...)
- Alternante: (1,- 4,16,- 64,256), (- 2, 4,- 8,16,-32,...)

Notações especiais

- P.G. de três termos:

$$\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right) \; ou \; (x, x \cdot q, x \cdot q^2)$$

- P.G. de quatro termos:

$$(x, x \cdot q, x \cdot q^2, x \cdot q^3)$$

- P.A. de cinco termos:

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right) ou \; (x, x \cdot q, x \cdot q^2, x \cdot q^3, x \cdot q^4)$$

Exemplo

- (PUC-RJ) Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1m de altura, e cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será

a) 121m b) 81m c) 32m d) 21m e) 15m.

Solução: Encontraremos a seguir a altura das 5 caixas:

Caixa 1 = 1m, Caixa 2 = 3m, Caixa 3 = 9m, Caixa 4 = 27m e Caixa 5 = 81m.

Assim a altura da pilha é 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121m.

Propriedade

- Dada uma P.G. qualquer (a_1, a_2,...,a_{n-1}, a_n, a_{n+1},...), temos:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Ou seja,

$$(a_2)^2 = a_1 \cdot a_3, (a_3)^2 = a_2 \cdot a_4, (a_4)^2 = a_3 \cdot a_5, \ldots$$

Exemplo

- Sabendo que a sequência (x, x + 2, 2x + 4,...) é uma P.G. crescente, determine sua razão.

Solução: Aplicando a propriedade, temos:

$$(x+2)^2 = x \cdot (2x+4)$$
$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 4x$$
$$2x^2 - x^2 + 4x - 4x - 4 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2.$$

Desse modo, temos (2,4,8) ou (-2,0,0). Como a P.G. (2,4,8) é a única crescente, a razão é q = 2.

Fórmula do termo geral da P.G.

- Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Fórmula do termo geral da P.G.

- Dada uma P.G. de razão q e ordem n, o termo a_n é dado pela seguinte expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde

a_n é um termo qualquer da P.G.

n é a posição do termo a_n

a_1 é o primeiro termo da P.G.

q é a razão da P.G.

Exemplo

- Determine o sétimo termo da P.G. (5,10,20,...).

Solução: Na P.G., temos que $a_1 = 5 \; e \; q = 2$. Assim:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$
$$a_7 = 5 \cdot 2^6$$
$$a_7 = 5 \cdot 64$$
$$a_7 = 320.$$

Exemplo

- A P.G. $\left(10, 2, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{625}\right)$ possui quantos termos?

Solução: Observando a P.G., notamos que $a_1 = 10\ e\ q = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Desse modo, para saber o número de termos da P.G., devemos descobrir qual a posição do termo $a_n = \frac{2}{625}$. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{2}{625} = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2}{625} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{3125} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$n - 1 = 5 \to n = 6.$$

Logo, a P.G. possui 6 termos.

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

- Para somar os n primeiros termos de uma P.G., podemos utilizar a fórmula a seguir:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, com\ q \neq 1}.$$

Onde

- a_1 é o primeiro termo somado;
- q é a razão da P.G.;
- n é o número de termos somados.

Exemplo

- Uma fábrica de panelas inaugurada em 2014 produziu 500 panelas nesse mesmo ano. Considerando que sua produção triplica a cada ano, em 2019, o dono da fábrica pôde dizer que, em toda a história da fábrica, foram produzidas quantas panelas?

Solução: O número de panelas produzidas nos anos formam a P.G. (500,1500,4500,...).

O valor procurado é a soma dos 6 primeiros termos dessa P.G., logo esse valor é:

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1}$$
$$S_6 = \frac{500 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1}$$
$$S_6 = \frac{500 \cdot 728}{2}$$
$$S_6 = 182000.$$

Soma dos termos de uma P.G. infinita

- O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Onde

S_n é o limite da soma infinitos termos da P.G.

a_1 é o primeiro termo da P.G.

Q é a razão da P.G.

Exemplo

- Qual o valor da soma $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$?

Solução: Observando o enunciado, percebemos que devemos somar os termos de uma P.G. infinita com $a_1 = 4 \; e \; q = \frac{1}{2}$. Aplicando a fórmula, temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{4}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = 4 \cdot \frac{2}{1} = 8.$$